2 Representación del espacio: trigonometría de triángulos no rectángulos y volumen

Este tema trata sobre cómo encontrar medidas de ángulos y distancias en triángulos que no son rectángulos, y de calcular el área de figuras bidimensionales (2D) y el volumen de figuras tridimensionales (3D). Estas técnicas se utilizan en astronomía para medir la distancia a estrellas cercanas, en criptografía para medir distancias entre puntos de referencia y en navegación para determinar el rumbo de los barcos y de los aviones.

Conceptos

- Espacio
- Representación

Microconceptos

- Área de un triángulo y otras figuras en dos dimensiones
- Área de un sector
- Sólidos tridimensionales: cilindro recto, pirámide, cono recto, esfera, semiesfera
- Ángulo entre dos rectas y entre una recta y un plano
- Volumen
- Área de la superficie de figuras tridimensionales

¿Cómo podemos medir la distancia a una estrella cercana?

¿Qué parte del césped de su jardín puede regar un aspersor y cómo depende esto del ángulo de rotación del aspersor?

¿Cómo se establecen las ubicaciones exactas de los puntos de referencia en la elaboración de mapas?

En 1856 el Gran Proyecto de Topografía Trigonométrica de la India midió la altitud del monte Everest (conocido en nepalí como Sagarmāthā y en tibetano como Chomolungma). Los/Las topógrafos(as) midieron la distancia entre dos puntos sobre el nivel del mar y luego midieron el ángulo desde cada uno de estos puntos a la cima de la montaña.

La cumbre del Everest está rotulada con E, los dos puntos A y B están aproximadamente a nivel del mar y la distancia entre ellos es de 33 km.

Si $\hat{E} = 90°$, ¿cuál sería la altitud máxima posible del Everest?

- ¿Por qué cree que se tardó tanto tiempo en determinar la altitud del Everest?
- ¿Por qué cree que los/las topógrafos(as) prefieren medir ángulos y no medir longitudes de lados?
- ¿Qué suposiciones está haciendo?

Desarrollo de las habilidades de indagación

Escriba preguntas de indagación similares para hallar la altura de un árbol, la distancia entre dos ciudades o la distancia entre dos estrellas.

¿Qué preguntas necesitaría hacer en estos escenarios que difieren de aquel en el que está estimando la altitud del monte Everest?

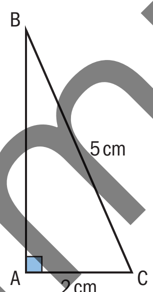
Piense acerca de las preguntas de este problema inicial y responda las que pueda. A medida que vaya avanzando en el tema, adquirirá conocimientos matemáticos y habilidades que le permitirán responderlas todas.

Antes de comenzar

Haga clic aquí para obtener ayuda con esta prueba de habilidades.

Qué necesitamos saber

1 Usar las propiedades de los triángulos, incluido el teorema de Pitágoras.



Por ejemplo: Hallar la longitud de AB en este triángulo.

$$AB^2 = BC^2 - AC^2$$
$$AB^2 = 5^2 - 2^2$$
$$AB^2 = 21$$
$$AB = \sqrt{21}$$
$$= 4{,}58\,\text{cm}$$

2 Razones trigonométricas en los triángulos rectángulos.
Por ejemplo:

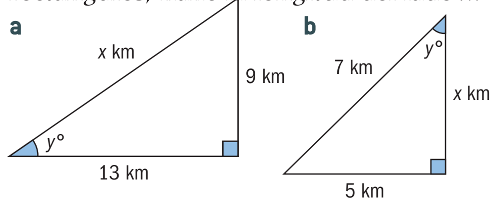
$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{2}{5}, \cos\hat{B} = \frac{\sqrt{21}}{5}, \tan\hat{B} = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

3 Hallar el área de un triángulo si se conocen un lado y su altura correspondiente.

4 Determinar el tercer ángulo de un triángulo si se conocen los otros dos.

Comprobemos nuestras habilidades

1 En cada uno de estos triángulos rectángulos, halle la longitud del lado *x*.



2 En cada uno de los triángulos de la pregunta **1**, halle la amplitud del ángulo *y*.

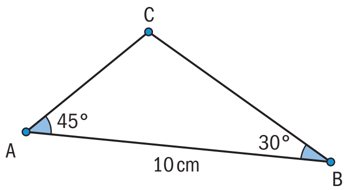
3 Halle el área de un triángulo con una base de 6 cm y una altura de 12,5 cm.

4 En ΔABC, $\hat{B} = 135°$ y $\hat{C} = 25°$. Halle $\hat{A}$.

2.1 Trigonometría de triángulos no rectángulos

La trigonometría de los triángulos rectángulos se utiliza para resolver problemas con triángulos rectángulos. Pero muchos problemas geométricos contienen triángulos que no son rectángulos.

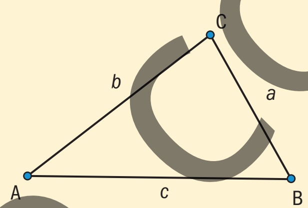
Por ejemplo: ΔABC donde $AB = 10$ cm, $\hat{A} = 45°$ y $\hat{B} = 30°$ es uno de esos triángulos.



Reflexione ¿Cómo podemos determinar las medidas del ángulo y los lados que faltan?

Investigación 1

1 Una topógrafa mide una parcela de tierra que tiene forma de triángulo ΔABC, como se muestra en el diagrama. Mide $a = 5$ m, $b = 7$ m y $c = 8$ m, y $\hat{A} = 38{,}2°$; $\hat{B} = 60{,}0°$ y $\hat{C} = 81{,}8°$, redondeados a 1 cd.



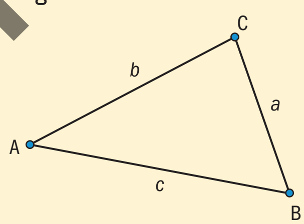
Ubique toda la información pertinente en los lugares apropiados del diagrama.

2 Calcule las razones $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}$, $\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$ y $\dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$. Redondee sus respuestas a 1 cd y complete la siguiente tabla.

ΔABC	$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}$	$\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$	$\dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$

Compare las tres razones. ¿Qué observa?

3 En el siguiente diagrama se muestra ΔABC:



Trace la altura $[CH]$ desde el vértice C hasta AB. Rotule la altura h.

Continúa en la página siguiente.

4 La altura [CH] divide ΔABC en dos triángulos rectángulos: ΔACH y ΔBCH.

Observe que $\hat{A}$ pertenece a ΔACH y $\hat{B}$ pertenece a ΔBCH.

Escriba una ecuación en función de $\operatorname{sen}\hat{A}$ y h usando la trigonometría de los triángulos rectángulos: $\operatorname{sen}\hat{A} = \ldots$

5 Escriba una ecuación en función de $\operatorname{sen}\hat{B}$ y h usando la trigonometría de los triángulos rectángulos: $\operatorname{sen}\hat{B} = \ldots$

6 Escriba cada una de las ecuaciones de los apartados **4** y **5** en la forma $h = \ldots$

7 Iguale las expresiones del lado derecho de las dos ecuaciones del apartado **6**.

8 Escriba una ecuación equivalente a su ecuación del apartado **7** dejando en un miembro $\operatorname{sen}\hat{A}$ y a y en el otro, $\operatorname{sen}\hat{B}$ y b.

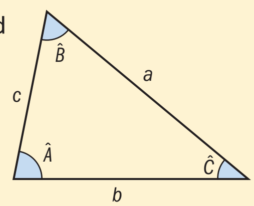
9 **Conceptual** ¿Cree que si hubiera dibujado primero la altura desde B hasta AC, habría llegado a la misma conclusión sobre las razones $\dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$ y $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}$? ¿Por qué?

10 **Conceptual** ¿Cuál es la relación entre el teorema del seno y la razón seno en un triángulo rectángulo?

El teorema del seno

Para cualquier triángulo ΔABC, donde a es la longitud del lado opuesto a $\hat{A}$, b es la longitud del lado opuesto a $\hat{B}$ y c es la longitud del lado opuesto a $\hat{C}$,

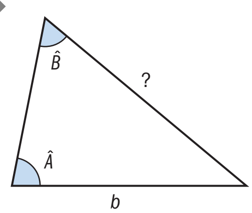
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \quad \text{o} \quad \frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{a} = \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{b} = \frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{c}$$



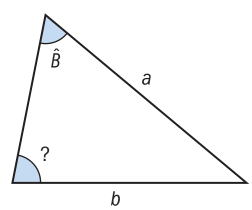
TdC

Si el seno, el coseno y la tangente son razones en un triángulo rectángulo, ¿cómo podemos usarlos en ángulos mayores de 90 grados?

La forma $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$ del teorema del seno se utiliza para calcular la longitud de un lado cuando se conocen dos ángulos y un lado opuesto.



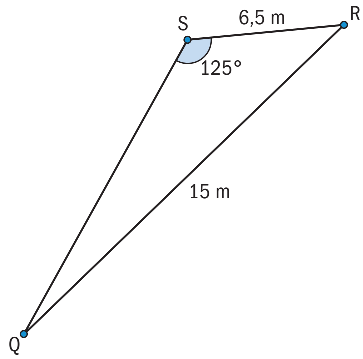
La forma $\dfrac{\operatorname{sen}\hat{A}}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{B}}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{C}}{c}$ del teorema del seno se utiliza para calcular un ángulo cuando se conocen dos lados y un ángulo opuesto.



El teorema del seno es válido para cualquier triángulo, incluidos los triángulos rectángulos.

Ejemplo 1

En ΔQRS, QR = 15 m, SR = 6,5 m y $\hat{S} = 125°$. Halle $\hat{Q}$. Aproxime su respuesta a 3 cs.



Dibujar un diagrama si no se proporciona uno. Rotular los puntos y completarlo con la información dada.

$$\frac{\operatorname{sen}\hat{S}}{QR} = \frac{\operatorname{sen}\hat{Q}}{SR}$$

$$\frac{\operatorname{sen}125°}{15} = \frac{\operatorname{sen}\hat{Q}}{6,5}$$

Identificar los lados y ángulos desconocidos y conocidos antes de aplicar el teorema del seno.

$$\operatorname{sen}\hat{Q} = \frac{6,5 \times \operatorname{sen}125°}{15}$$

$$\hat{Q} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{5,6 \times \operatorname{sen}125°}{15} = 20,8° \ (3\,\text{cs})$$

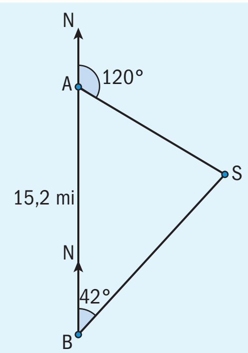
Redondear la respuesta con la precisión especificada en la pregunta. Si no se especifica, redondear a 3 cs.

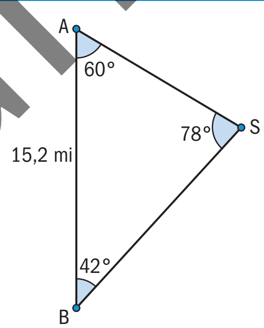
Ejemplo 2

Un barco S sigue un rumbo de 120° desde el puerto A y 042° desde el puerto B.

La distancia entre los puertos A y B es de 15,2 millas.

Halle la distancia entre el barco y cada puerto.





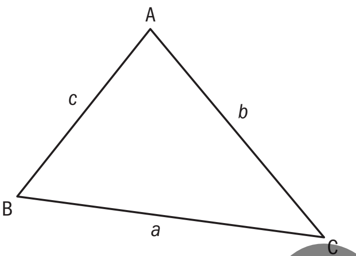
Dibujar un diagrama para representar las posiciones del barco y de los puertos.

Continúa en la página siguiente.

$\hat{A} = 180° - 120° = 60°$ $\hat{S} = 180° - (42° + 60°) = 78°$	Usar propiedades de los ángulos para hallar $\hat{A}$ y $\hat{S}$.
$\dfrac{AS}{\text{sen}\,42°} = \dfrac{BS}{\text{sen}\,60°} = \dfrac{15{,}2}{\text{sen}\,78°}$ $AS = \text{sen}\,42° \times \dfrac{15{,}2}{\text{sen}\,78°} = 10{,}4$ millas (3 cs) $BS = \text{sen}\,60° \times \dfrac{15{,}2}{\text{sen}\,78°} = 13{,}5$ millas (3 cs)	Usar el teorema del seno para hallar las longitudes.

Ejercicio 2A

1 Halle el ángulo desconocido en cada ΔABC. Dé su respuesta redondeando a tres cifras significativas.



a Halle $\hat{A}$, donde $a = 12{,}5$ cm, $b = 15{,}4$ cm y $\hat{B} = 68°$.

b Halle $\hat{B}$, donde $b = 42{,}8$ cm, $c = 30{,}6$ cm y $\hat{C} = 41°$.

c Halle $\hat{C}$, donde $a = 7{,}2$ m, $c = 5{,}1$ m y $\hat{A} = 70°$.

2 En ΔABC, AC = 8 cm, $\hat{C} = 101°$ y $\hat{B} = 32°$. Halle las longitudes de [AB] y [BC].

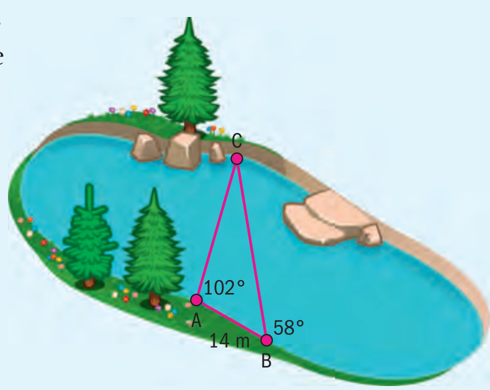
3 Un barco navega hacia el norte. El capitán ve un faro a 12 km sobre un rumbo de 036°. Más tarde, el capitán observa que el faro está sobre un rumbo de 125°. ¿Qué distancia navegó el barco entre estas dos observaciones?

Podemos usar el teorema del seno para resolver problemas prácticos que implican distancias que son imposibles de medir.

Ejemplo 3

Un servicio de parques pretende construir un puente [AC] sobre un embalse. Los puntos A y B están sobre la orilla del embalse, de tal manera que la distancia AB = 14 m, $\hat{A} = 102°$ y $\hat{B} = 58°$.

Calcule la longitud del puente [AC], y redondee al metro más cercano.



Continúa en la página siguiente.

$\hat{C} = 180° - (58° + 102°) = 20°$	Hallar $\hat{C}$ antes de usar el teorema del seno.
$\dfrac{AC}{\text{sen}\,58°} = \dfrac{14}{\text{sen}\,20°}$	Después usar el teorema del seno.
$AC = \text{sen}\ 58° \times \dfrac{14}{\text{sen}\,20°} = 35$ m (metro más cercano)	La respuesta está redondeada al metro más cercano, tal cual se requería en la pregunta.

¿Sabía que...?

En topografía, se denomina **triangulación** al método que se usa para determinar la ubicación de un punto y la distancia del mismo midiendo los ángulos desde dos puntos conocidos en ambos extremos de un segmento fijo.

El instrumento de topografía para medir ángulos horizontales y verticales se denomina **teodolito**.

Mentalidad internacional

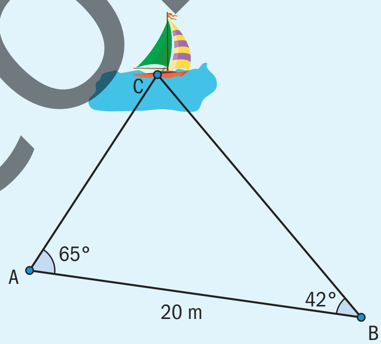
Inglaterra y Francia utilizaron la triangulación en una discusión sobre la curvatura de la Tierra. Investigue acerca de la curvatura de la Tierra calculada en el siglo XVII.

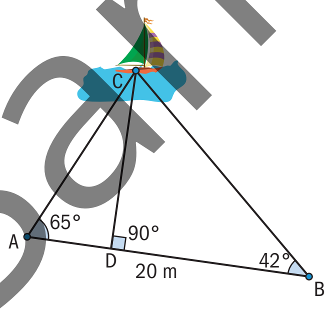
Ejemplo 4

Dos personas que están en los puntos A y B observan un velero en la posición C. La distancia entre los puntos A y B sobre la costa es de 20 m.

La primera persona mide $\hat{A} = 65°$ y la segunda mide $\hat{B} = 42°$.

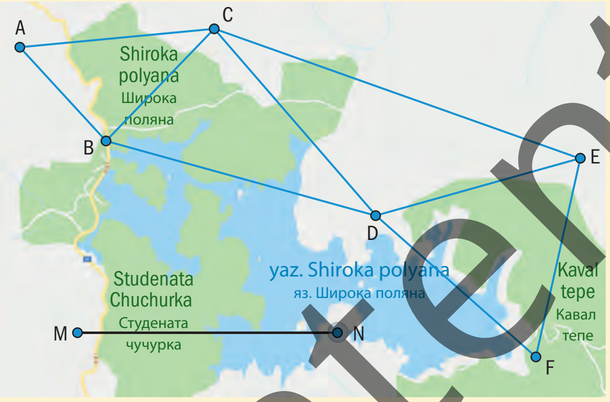
Halle la distancia desde C a la costa (AB).



$\hat{C} = 180° - (65° + 42°) = 73°$	Hallar $\hat{C}$ antes de usar el teorema del seno.
$\dfrac{BC}{\text{sen}\,65°} = \dfrac{20}{\text{sen}\,73°}$	Aplicar el teorema del seno para obtener la distancia desde C hasta B o desde C hasta A.
$BC = \text{sen}\,65° \times \dfrac{20}{\text{sen}\,73°} = 18{,}9543\ldots$	
	Para hallar la distancia desde C hasta [AB], hay que usar el triángulo rectángulo ΔBCD para hallar CD, donde [CD] ⊥ [AB].
$\text{sen}\,42° = \dfrac{CD}{18{,}9543\ldots}$ $CD = \text{sen}\ 42° \times 18{,}9543\ldots = 12{,}7$ m (3 cs)	Usar la razón seno en el triángulo rectángulo ΔBCD para calcular CD.

Investigación 2

La triangulación se usa frecuentemente en topografía. Implica medir en un triángulo dos ángulos y la longitud de un lado y después, usar esas medidas para calcular las longitudes de los otros dos lados. Luego, cada una de las distancias calculadas se usan como lados en otro triángulo para calcular las distancias a otro punto, que a la vez puede comenzar otro triángulo. Esto se hace para formar una cadena de triángulos que conectan el punto de origen con otro punto según sea necesario. La cadena incluye tantos triángulos como sean necesarios para alcanzar el punto de destino o segmento cuya medida tiene que obtenerse.



1. Una topógrafa mide la distancia entre los puntos A y B y obtiene 350 m. Identifica puntos de referencia visibles en C, D y E, como se muestra en el mapa. Quiere hallar la distancia DF.

   Utilice un transportador para hallar en el mapa $\mathrm{A\hat{B}C}$ y $\mathrm{B\hat{A}C}$. Calcule la longitud de $[\mathrm{BC}]$.

2. Utilice un transportador para medir $\mathrm{B\hat{C}D}$ y $\mathrm{C\hat{B}D}$. Utilice estas mediciones y la longitud de $[\mathrm{BC}]$ del apartado **1** para hallar las longitudes de $[\mathrm{CD}]$ y $[\mathrm{BD}]$.

3. En $\Delta\mathrm{CDE}$ mida dos ángulos. Halle la longitud de $[\mathrm{DE}]$.

4. Mida dos ángulos y calcule la longitud de $[\mathrm{DF}]$.

5. ¿Son necesarias todas las longitudes de los lados calculadas en los apartados **1** a **3** para hallar DF? En caso contrario, ¿cuál es la que no se necesita?

6. MN es la distancia entre otros dos puntos de referencia y no se puede medir directamente. Utilice el transportador y la información de los apartados anteriores para hallar MN.

7. Aunque la triangulación es un método inteligente para determinar distancias y se usa mucho en topografía, no resulta útil cuando los objetos están muy alejados, como en el caso de las estrellas.

   ¿Por qué cree que la triangulación puede no funcionar cuando los lugares están demasiado alejados, como las estrellas?

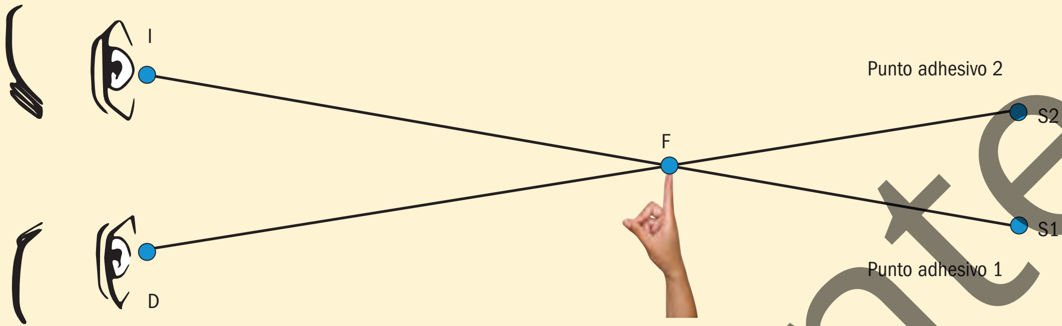
Investigación 3

Mantenga la mano elevada hacia el frente y levante un dedo. Mírelo primero con el ojo izquierdo y luego con el ojo derecho, mientras el otro ojo está cerrado. El dedo parecerá moverse con respecto al fondo. Este fenómeno se denomina **paralaje**.

Luego, aplicará el método de paralaje para medir la distancia que hay entre sus ojos y un dedo que mantendrá levantado con el brazo estirado hacia el frente. (En lugar de medir la distancia entre sus ojos y el dedo, podría medir la distancia a un árbol u otro punto de referencia en el exterior).

Continúa en la página siguiente.

1 Coloque un punto adhesivo sobre la pared aproximadamente a la altura de sus ojos. Cierre el ojo derecho y mire con el ojo izquierdo, y alinee el dedo índice con el punto adhesivo que está sobre la pared mientras mantiene el brazo extendido hacia el frente. Ahora, sin cambiar de posición, mire el dedo índice con el ojo derecho. Pida a su compañero(a) que ubique el punto adhesivo en el lugar de la pared que está tapado por su dedo. La situación se representa en el siguiente diagrama:



2 Mida $D\hat{I}F$ e $I\hat{D}F$ con la herramienta para medir ángulos. ¿Qué observa?

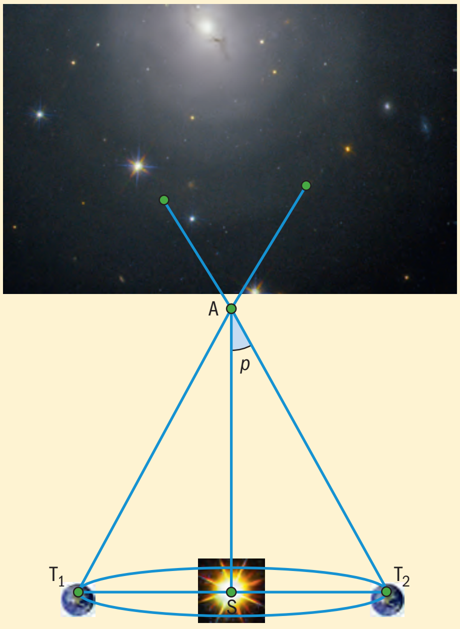
3 Mida la distancia ID entre sus ojos izquierdo y derecho.

4 Calcule la distancia entre F e $[ID]$.

Investigación 4

1 En astronomía se usa el efecto de paralaje para medir distancias a estrellas cercanas. Para medir la distancia desde la Tierra a una estrella A, se usaría un diagrama como el que se muestra.
S representa la posición del Sol, y T_1 y T_2 representan las posiciones de la Tierra cuando orbita alrededor del Sol, aproximadamente con una diferencia de 6 meses (por ejemplo, la posición de la Tierra en junio y en diciembre). $T_1\hat{A}S$ (o $T_2\hat{A}S$) se denomina **ángulo de paralaje** (p). Es la mitad de $T_1\hat{A}T_2$, el cual puede medirse a partir del desplazamiento de la estrella A con respecto al fondo en el que hay otras estrellas más distantes.

¿Por qué cree que los/las astrónomos(as) miden el ángulo de paralaje $T_1\hat{A}S$ en lugar de $A\hat{T}_1S$ o $A\hat{T}_2S$?



2 Los/Las astrónomos(as) miden distancias a las estrellas utilizando la distancia entre el Sol y la Tierra como una unidad básica que denominan unidad astronómica (1 AU).
Demuestre que, cuando el ángulo de paralaje es $p = 45°$, la distancia del Sol a la estrella A es 1 AU.

3 Utilice el ΔAT_1S para escribir la distancia AS en función del ángulo de paralaje p y la distancia entre el Sol y la Tierra, ST_1 (1 AU).

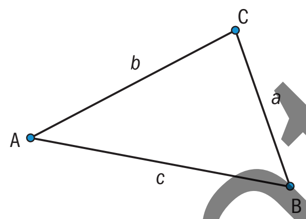
Continúa en la página siguiente.

4 Demuestre que, cuando una estrella A tiene un ángulo de paralaje $p = 1°$, la distancia del Sol a A es aproximadamente 57 AU, redondeada al entero más cercano.

5 El ángulo de paralaje de una estrella es $1 \times 10^{-4°}$. Halle la distancia de la estrella a la Tierra. Redondee su respuesta al millar de AU más cercano.

6 ¿Por qué el efecto de paralaje se puede usar para calcular distancias a estrellas cercanas, pero no es adecuado para medir distancias a estrellas muy lejanas?

Tres satélites están ubicados en los puntos A, B y C, donde a = 7 km, b = 12 km y c = 14 km, como se muestra en el diagrama de ΔABC.
¿Cómo puede determinar los ángulos del triángulo? ¿Cómo lo haría?



Investigación 5

1 Una topógrafa mide una parcela de tierra que tiene la forma del triángulo ΔABC, como se muestra más abajo. Mide $a = 5$ km, $b = 7$ km y $c = 8$ km, y $\hat{A} = 38{,}2°$; $\hat{B} = 60{,}0°$ y $\hat{C} = 81{,}8°$, redondeados a 1 cd.

Utilice la información dada para completar la siguiente tabla:

a^2	b^2	c^2	$2ac \cos \hat{B}$	$2ab \cos \hat{C}$	$2bc \cos \hat{A}$	$a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$	$b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$	$a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

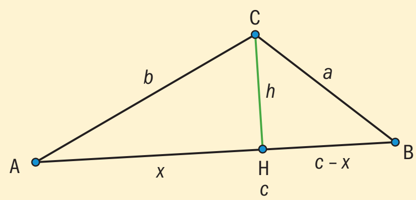
2 Compare los valores de las distintas columnas. ¿Observa algún patrón? ¿A qué conclusión llega?

3 Mire el ΔABC que se muestra en el diagrama de la derecha.

Se traza la altura de ΔABC, [CH], desde el vértice C hacia el lado [AB], y se rotula con una h.

El punto H divide el lado c en dos segmentos, x y $c - x$.

Utilice el teorema de Pitágoras para escribir una ecuación en función de h, b y x.



4 Utilice el teorema de Pitágoras para escribir una ecuación en función de h, a y $c - x$.

5 Despeje h^2 en las ecuaciones de los apartados **3** y **4** .

6 Iguale las expresiones de los dos miembros derechos del apartado **5**.

7 Despeje a^2 en la ecuación del apartado **6**.

8 Utilice ΔAHC para escribir una expresión para x en función de b y $\hat{A}$.

9 Sustituya su expresión para x del apartado **8** en la ecuación del apartado **7**. El resultado se denomina teorema del coseno.

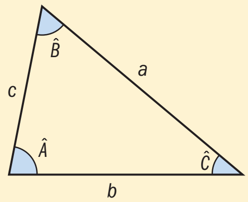
10 **Conceptual** ¿Cuál es la relación entre el teorema del coseno y el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo?

Geometría y trigonometría

El teorema del coseno

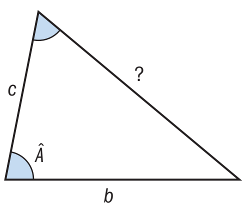
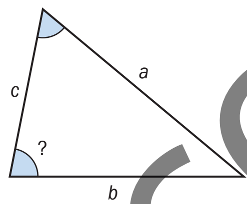
Para $\Delta \mathrm{ABC}$, donde a es la longitud del lado opuesto a $\hat{A}$, b es la longitud del lado opuesto a $\hat{B}$ y c es la longitud del lado opuesto a $\hat{C}$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$



TdC

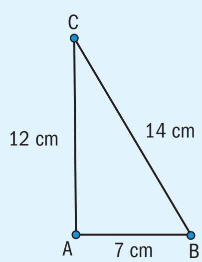
Siempre se dijo que la relación de Euler, $e^{i\pi} + 1 = 0$, es la ecuación más hermosa de todas las matemáticas. ¿Qué se entiende por belleza y elegancia en matemáticas?

La forma $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$ del teorema del coseno se utiliza para calcular la longitud de un lado cuando se conocen dos lados y el ángulo entre ellos.	La forma $\cos\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ del teorema del coseno se utiliza para calcular un ángulo cuando se conocen los tres lados.
	

El teorema del coseno es válido en cualquier triángulo, incluidos los triángulos rectángulos.

Ejemplo 5

Halle los ángulos del $\Delta \mathrm{ABC}$, donde $a = 14$ m, $b = 12$ m y $c = 7$ m.



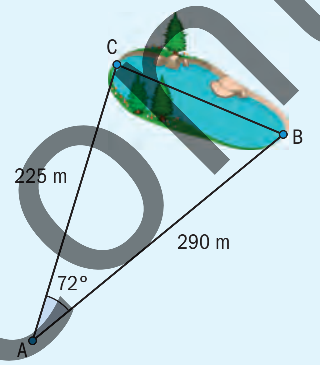
$\cos\hat{A} = \dfrac{12^2 + 7^2 - 14^2}{2 \times 12 \times 14}$	Para hallar los ángulos del $\Delta \mathrm{ABC}$, usar las formas $\cos\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos\hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ o $\cos\hat{C} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ del teorema del coseno.
$\hat{A} = \cos^{-1}\left(\dfrac{12^2 + 7^2 - 14^2}{2 \times 12 \times 14}\right) = 91{,}0°$ (3 cs)	Dado que el nivel de precisión no está especificado en la pregunta, las amplitudes de los ángulos están redondeadas a 3 cs.
$\cos\hat{B} = \dfrac{14^2 + 7^2 - 12^2}{2 \times 14 \times 7}$	

Continúa en la página siguiente.

$\hat{A} = \cos^{-1}\left(\dfrac{14^2 + 7^2 - 12^2}{2 \times 14 \times 7}\right) = 59{,}0°$ (2 cs) $\cos\hat{C} = \dfrac{14^2 + 12^2 - 7^2}{2 \times 14 \times 12}$ $\hat{C} = \cos^{-1}\left(\dfrac{14^2 + 12^2 - 7^2}{2 \times 14 \times 12}\right) = 30{,}0°$ (3 cs)	

Ejemplo 6

Halle la longitud del lago, CB, conociendo las distancias AB = 290 m y AC = 225 m, y el ángulo $\hat{A} = 72°$.



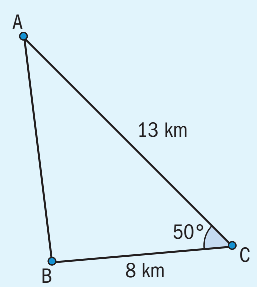
$CB^2 = 290^2 + 225^2 - 2 \times 225 \times 290 \cos 72°$ $CB^2 = 94\,398{,}2\ldots$ $CB = \sqrt{94398{,}2\ldots} = 307$ m	Usar la forma $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$ del teorema del coseno, ya que se conocen dos lados y el ángulo entre ellos. Redondear la respuesta final a 3 cs.

En algunos casos, podemos necesitar aplicar ambos teoremas, el del seno y el del coseno, para hallar la información necesaria para resolver un problema.

Ejemplo 7

Las ciudades A, B y C forman ΔABC, con lados BC = 8 km y AC = 13 km, y ángulo $\hat{C} = 50°$.

Halle $\hat{A}$ y $\hat{B}$.



Continúa en la página siguiente.

Geometría y trigonometría

$AB^2 = 8^2 + 13^2 - 2 \times 13 \times 8 \cos 50° = 99{,}3001\ldots$ $AB = \sqrt{99{,}3001\ldots}$ $AB = 9{,}96494\ldots = 9{,}96$ km (3 cs)	Primero, usar la forma $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$ del teorema del coseno para calcular la longitud de [AB].
$\dfrac{\operatorname{sen}\hat{A}}{8} = \dfrac{\operatorname{sen}50°}{9{,}96494\ldots}$ $\operatorname{sen}\hat{A} = 8 \times \dfrac{\operatorname{sen}50°}{9{,}96494\ldots}$ $\hat{A} = \operatorname{sen}^{-1}\left(8 \times \dfrac{\operatorname{sen}50°}{9{,}96494\ldots}\right) = 38{,}0°$ (3 cs)	Una vez calculado AB, usar el teorema del seno para determinar $\hat{A}$ y $\hat{B}$. Hay que recordar que no se deben usar valores redondeados en cálculos intermedios, ya que podría llevar a respuestas finales imprecisas.
$\hat{B} = 180° - (37{,}9512\ldots + 50°) = 92{,}0°$ (3 cs)	Finalmente, usar el hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

Ejercicio 2B

1 Utilice esta información para hallar todos los lados y los ángulos de cada triángulo:

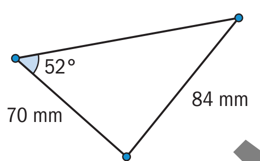
a $a = 12$ cm, $b = 6{,}5$ cm y $c = 7$ cm

b $a = 11$ mm, $b = 14$ mm y $c = 18$ mm

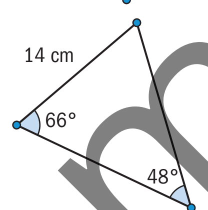
c $c = 22$ m, $\hat{A} = 25°$ y $\hat{B} = 83°$

2 Utilice esta información para hallar todos los lados y los ángulos de cada triángulo:

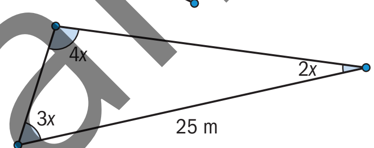
a



b



c



3 Un topógrafo tiene que determinar la distancia entre dos puntos, A y B, que están en orillas opuestas de un río. Otro punto C está a 450 m de A, del mismo lado del río, y es tal que $B\hat{A}C = 45°$ y $A\hat{C}B = 55°$. Halle la distancia desde A hasta B, y redondee al metro más cercano.

4 Un senderista deja el campamento y camina 5 km siguiendo un rumbo de 058°. Se toma un descanso y luego camina otros 8 km siguiendo un rumbo de 103°. Se detiene de nuevo antes de regresar al campamento y toma un camino directo. Halle la distancia al campamento desde el segundo descanso.

5 La distancia en línea recta entre dos ciudades A y B es de 223 km. La distancia en línea recta entre las ciudades A y C es de 152 km. La distancia en línea recta entre las ciudades B y C es de 285 km.

Halle los ángulos entre cada una de las tres ciudades.

6 Para hallar el tercer lado del ΔABC, donde $AB = 40$ cm, $BC = 25$ cm y $B\hat{A}C = 35°$, Velina y Cristian sugirieron lo siguiente:

Cristian: “Usemos el teorema del coseno, ya que conocemos dos lados y un ángulo”.

Velina: “Usemos el teorema del seno, ya que conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos”.

Indique quién tiene el método correcto y justifique su decisión. A partir de aquí, resuelva el triángulo.

Desarrollo de las habilidades de indagación

Miremos nuevamente el problema inicial. El Gran Proyecto de Topografía Trigonométrica utilizó un teodolito para medir los ángulos desde los puntos A y B a la cumbre E:

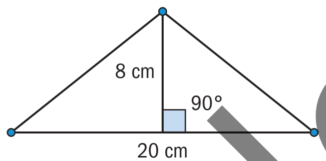
$B\hat{A}E = 30{,}5°$ y $A\hat{B}E = 26{,}2°$.

Los puntos A y B están a 33 km de distancia. Halle la altitud del monte Everest, y redondee la respuesta al metro más cercano.

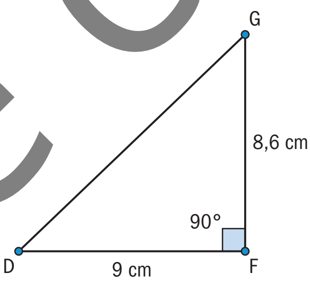
2.2 Fórmula del área de un triángulo: aplicaciones de la trigonometría de triángulos rectángulos y no rectángulos

A continuación, se muestran cuatro triángulos. Si es posible, determine el área de cada triángulo. Si no puede determinar el área, indique qué información adicional sería necesaria para poder hacerlo.

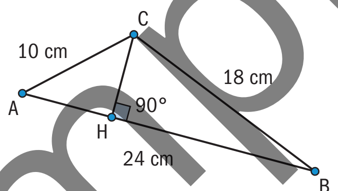
1



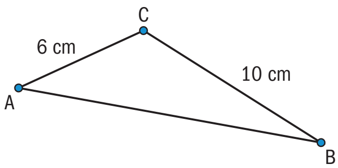
2



3



4



Investigación 6

Considere una parcela de tierra con la forma de ΔABC, con lados a y c, y ángulo $\hat{B}$.

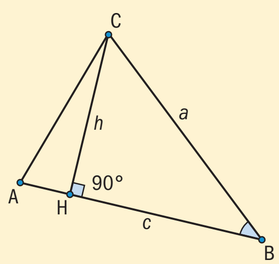
Se traza la altura h desde C hasta $[AB]$, tal que $h \perp [AB]$.

1 Escriba una expresión para el área de ΔABC en función del lado c y de la altura h.

2 Considere ΔBHC. Escriba una expresión para h en función de a y el ángulo $\hat{B}$.

3 Sustituya su expresión para h del apartado **2** en su expresión para el área del apartado **1** y luego, demuestre lo siguiente:

área de $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} ac \operatorname{sen} \hat{B}$



Continúa en la página siguiente.

Geometría y trigonometría

4 ¿Cómo sería la fórmula del apartado **3** si se conocieran b, c y sen $\hat{A}$ o a, b y sen $\hat{C}$? Escriba estas otras formas de la fórmula del área.

5 **Conceptual** ¿Cuál es la relación entre la fórmula

$$\text{Área} = \frac{1}{2}ac\,\text{sen}\,B$$ y la fórmula del área de un triángulo

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\times \text{base} \times \text{altura}?$$

Mentalidad internacional

El área puede medirse en unidades cuadradas, pero también en “paquetes” como las hectáreas o los acres.

¿Qué países usan la *bigha*, el *mou*, el *feddan*, el *rai* y el *tsubo*?

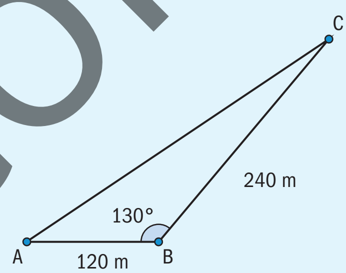
El área de cualquier triángulo ΔABC viene dada por la fórmula

$$\text{Área} = \frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\hat{A} \text{ o } \text{Área}= \frac{1}{2}ac\,\text{sen}\,\hat{B} \text{ o } \text{Área}= \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\hat{C}.$$

Ejemplo 8

Una granjera tiene un terreno triangular ΔABC, cuyas longitudes son AB = 120 m y BC = 240 m, y $\hat{B}$ = 130°.

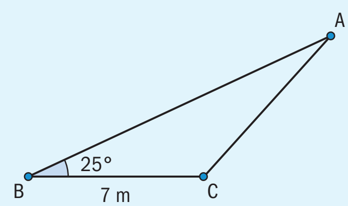
Halle el área del terreno, y rendondee la respuesta al entero más cercano.



$\text{Área} = \frac{1}{2}\times 120 \times 240 \times \text{sen}\ 130$	Usar la fórrmula $\text{Área} = \frac{1}{2}ac\,\text{sen}\,\hat{B}$.
$\text{Área} = 11\,031\ \text{m}^2$	Redondear el área al entero más cercano.

Ejemplo 9

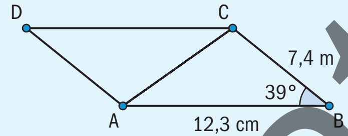
El área del ΔABC es 29,6 cm², $\hat{B}$ = 25° y BC = 7 cm. Halle la longitud del lado [AB].



$29{,}6 = \frac{1}{2}\times 7 \times \text{AB} \times \text{sen}\ 25°$	Usar la fórmula $\text{Área} = \frac{1}{2}ac\,\text{sen}\,\hat{B}$
$\text{AB} = \frac{29{,}6 \times 2}{7 \times \text{sen}\ 25°} = 20{,}0\ \text{cm (3 cs)}$	Redondear la respuesta a 3 cs.

Ejemplo 10

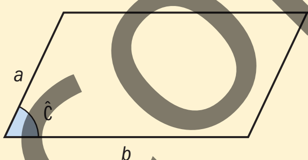
Halle el área del paralelogramo ABCD en el que BC = 7,4 cm, AB = 12,3 cm y $\hat{B} = 39°$.



Área de $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times 12{,}3 \times 7{,}4 \times \text{sen}\,39$ Área de $\Delta ABC = 28{,}6403\ldots\ \text{cm}^2$	Usar la fórmula del área de un triángulo para hallar el área del ΔABC. Dado que ΔABC = ΔADC (por tener tres lados iguales), tendrán las mismas áreas.
Área de $ABCD = 2 \times 28{,}6403\ldots = 57{,}3\ \text{cm}^2$ (3 cs)	El área del paralelogramo será el doble que el área de ΔABC.

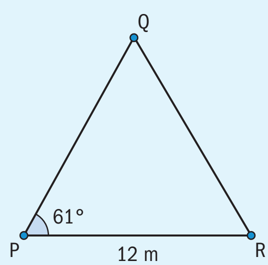
El área de un paralelogramo ABCD viene dada por la fórmula

$$\text{Área} = ab\,\text{sen}\,\hat{C}$$



Ejemplo 11

Un tejado tiene la forma de un triángulo isósceles ΔPRQ, donde PQ = RQ, $\hat{P} = 61°$ y PR = 12 cm. Halle el área de ΔPRQ.

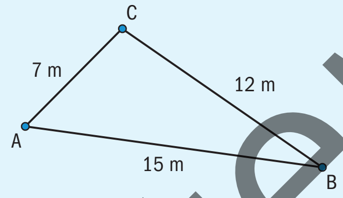


$\hat{P} = \hat{R} = 61°$	Dado que ΔPRQ es isósceles y PQ = RQ, $\hat{P} = \hat{R} = 61°$.
$\hat{Q} = 180° - 2 \times 61° = 58°$	Hallar el tercer ángulo sabiendo que la suma de los tres ángulos es igual a 180°.
$\frac{PQ}{\text{sen}\,61°} = \frac{12}{\text{sen}\,58°}$ $PQ = \text{sen}\,61 \times \frac{12}{\text{sen}\,58} = 12{,}3759\ldots$	Usar el teorema del seno para hallar la longitud de [PQ].
$\text{Área} = \frac{1}{2} \times 12 \times 12{,}3759\ldots \times \text{sen}\,61°$ $\text{Área} = 64{,}9\ \text{cm}^2$ (3 cs)	Usar la fórmula del área para hallar el área de ΔPRQ.

Para poder determinar el área de un triángulo necesitamos conocer dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, dos ángulos y un lado, o los tres lados del triángulo.

Ejemplo 12

Halle el área de una huerta triangular cuyos lados son AB = 15 m, AC = 7 m y BC = 12 m.

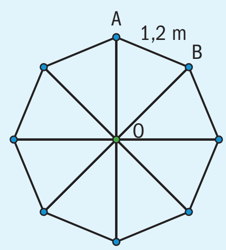


$\cos\hat{C} = \dfrac{12^2 + 7^2 - 15^2}{2 \times 12 \times 7}$	Para usar la fórmula del área, es necesario encontrar uno de los ángulos del triángulo.
$\hat{C} = \cos^{-1}\left(\dfrac{12^2 + 7^2 - 15^2}{2 \times 12 \times 7}\right) = 100{,}980\ldots°$	Se puede usar el teorema del coseno para hallar $\hat{C}$.
$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \times 12 \times 7 \times \operatorname{sen} 100{,}980\ldots$ $\text{Área} = 41{,}2\ \text{m}^2$ (3 cs)	Ahora, usar la fórmula del área para calcular el área de ΔABC.

Ejemplo 13

El suelo de un cenador tiene la forma de un octógono regular de 1,2 m de lado y está formado por ocho triángulos congruentes.

Halle el área del suelo.

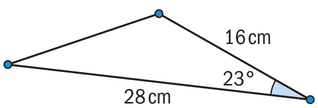


$A\hat{O}B = \dfrac{360°}{8} = 45°$	Área del suelo = 8 × área de ΔAOB. Para hallar el área de ΔAOB, primero hay que hallar $A\hat{O}B$.
$B\hat{A}O = A\hat{B}O = \dfrac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°$	Para hallar los otros dos ángulos de ΔAOB, es necesario tener en cuenta que la suma de los tres ángulos es 180° y considerar que ΔAOB es isósceles.
$\dfrac{AO}{\operatorname{sen} 67{,}5°} = \dfrac{1{,}2}{\operatorname{sen} 45°}$ $AO = \operatorname{sen} 67{,}5° \times \dfrac{1{,}2}{\operatorname{sen} 45°} = 1{,}56787\ldots\ \text{m}$	Luego usar el teorema del seno para hallar la longitud de [AO].
$\text{Área} = 8 \times \dfrac{1}{2} \times 1{,}56787\ldots \times \operatorname{sen} 45°$ $\text{Área} = 6{,}95\ \text{m}^2$ (3 cs)	Para hallar el área del suelo octagonal, multiplicar el área de ΔAOB por 8.

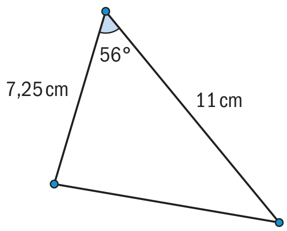
Ejercicio 2C

1 Halle el área de cada uno de los siguientes triángulos:

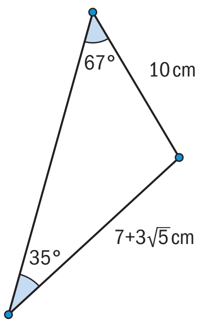
a



b



c



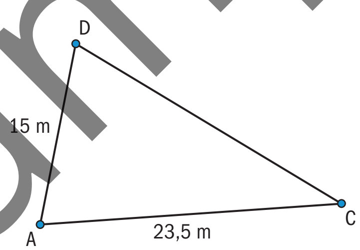
2 Halle el área de cada uno de los siguientes triángulos.

a $a = 13{,}6\,\text{cm}$, $b = 9{,}2\,\text{cm}$ y $\hat{C} = 49°$

b $c = 19\,\text{m}$, $\hat{A} = 33°$ y $\hat{B} = 42{,}5°$

c $a = 25\,\text{cm}$, $b = 14\sqrt{2}\,\text{cm}$, $c = \sqrt{59}\,\text{cm}$

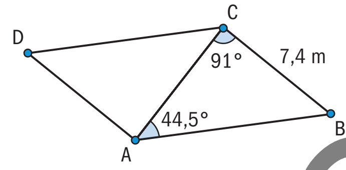
3 Un jardinero utiliza una parcela triangular de su jardín para un vivero. Los dos lados del terreno triangular son AC = 23, 5 m y AD = 15 m.



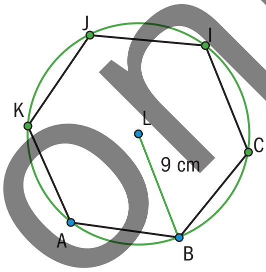
a Si DC = 29 m, halle el área del terreno destinado al vivero.

b Con 0,5 kg de semillas de hierba se cubre un área de 150 m². Determine la masa de las semillas, en kg, necesaria para plantar el terreno con hierba.

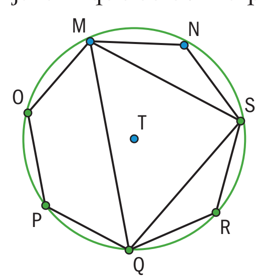
4 Halle el área del paralelogramo ABCD con BC = 7,4 cm, $B\hat{A}C = 44{,}5°$ y $A\hat{C}B = 91°$.



5 Un hexágono regular está inscrito en un círculo de radio 9 cm. Halle el área del hexágono.



6 Un jardín tiene la forma de un heptágono regular (siete lados), MNSRQPO. Un círculo con centro T y radio 25 cm circunscribe el heptágono, como se muestra en la figura siguiente. El área de ΔMSQ se utiliza para una zona de juegos infantiles y en el resto del jardín, se plantan flores. Halle el área del jardín que se utiliza para plantar flores.



Geometría y trigonometría

Investigación 7

Un aspersor que se encuentra en el centro de un jardín cubierto de césped riega agua a una distancia de 20 m y rota con un determinado ángulo. ¿Qué área del jardín riega el aspersor? Escriba sus respuestas redondeando a 3 cs.

1 Halle el área del jardín que regará el aspersor si se configura para que rote con un ángulo de 180°.

2 Halle el área del jardín que regará el aspersor si se configura para que rote con un ángulo de 60°.

3 Halle el área del jardín que regará el aspersor si se configura para que rote con un ángulo de 1°.

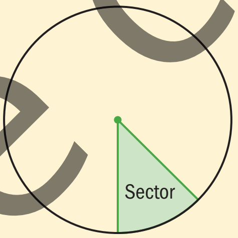
4 Halle el área del jardín que regará el aspersor si se configura para que rote con un ángulo de α°.

5 ¿Podría crear una fórmula para hallar el área del jardín que regará el aspersor, que proyecta agua a r metros y se configura para que rote con un ángulo α?

6 **Fáctico** ¿Cuál es la fórmula para el área de un sector?

7 **Conceptual** ¿Cómo se deduce la fórmula del área de un sector?

Un sector es una parte del círculo que se encuentra entre dos radios y el arco subtendido.



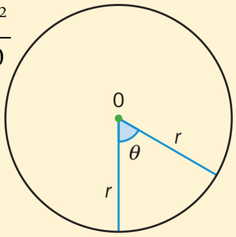
Mentalidad internacional

¿Por qué hay 360 grados en una vuelta completa? ¿Por qué usamos minutos y segundos para medir el tiempo?

Cualquier ángulo central es una fracción de 360°, por lo tanto, el área de un sector será una fracción del área del círculo.

$$\text{Área de un sector circular} = \frac{\theta}{360} \times \left(\pi r^2\right) = \frac{\theta \pi r^2}{360}$$

donde r es el radio del círculo y θ es el ángulo central en grados.



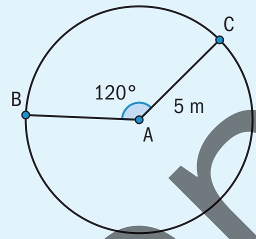
TdC

"Los/Las matemáticos(as) admiran la elegancia y la sencillez por encima de todo, y el objetivo final de resolver un problema es encontrar el método que lo resuelve de la forma más eficiente", Keith Devlin.

¿Qué es la elegancia y la sencillez en una prueba matemática?

Ejemplo 14

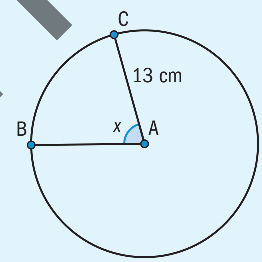
Un aspersor de cultivos riega un círculo de radio 5 m. Halle el área del sector BAC con un radio de 5 m y un ángulo central de 120°, como se muestra en el diagrama. Dé su respuesta redondeando a 3 cs.



Área de un sector $= \dfrac{120° \times \pi \times 5^2}{360} = 26{,}2\ \text{m}^2$ (3 cs)	Sustituir $r = 5$ y $\theta = 120°$ en la fórmula del área del sector.

Ejemplo 15

El área de un sector BAC con un radio de 13 cm es 30π cm². Halle x, la amplitud del ángulo central del sector BAC.

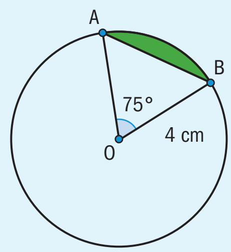


$30\pi = \dfrac{x\pi \times 13^2}{360}$	Usar la fórmula del área de un sector sustituyendo los valores dados para el área y el radio.
$x = \dfrac{30 \times 360}{169} = 63{,}9°$ (3 cs)	Luego usar la CPG para calcular x.

Ejemplo 16

El sector AOB tiene un radio de 4 cm y un ángulo central de 75°.

Determine el área del segmento delimitado por la cuerda [AB] y el arco subtendido.



Área de un sector $= \dfrac{75° \times \pi \times 4^2}{360°} = 10{,}4719\ldots\ \text{cm}^2$	Hallar el área del sector AOB.
Área del triángulo $= \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \operatorname{sen} 75° = 7{,}7274\ldots\ \text{cm}^2$	Hallar el área del triángulo AOB.
Área delimitada $= 10{,}4719\ldots - 7{,}7274\ldots$ $= 2{,}74\ \text{cm}^2$ (3 cs)	

Ejercicio 2D

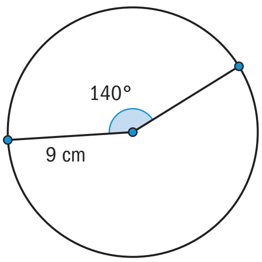
1 Determine las áreas de los sectores con radio r y ángulo central θ que se dan a continuación. Redondee sus respuestas a 3 cs.

a $r = 6$ cm, $\theta = 70°$

b $r = 3$ cm, $\theta = 49°$

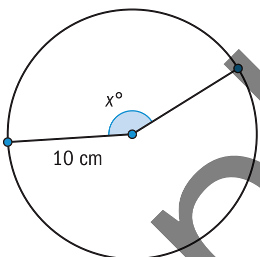
c $r = 10{,}5$ cm, $\theta = 122°$

2 **a** De un círculo de madera se corta un sector con un ángulo central de 140° y un radio de 9 cm. Halle el área del sector.



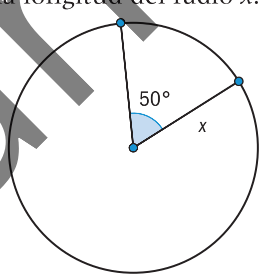
b Un sector con un radio de 10 cm y un ángulo central de $x°$ tiene un área igual a 48π cm^2.

Halle la amplitud del ángulo $x°$.



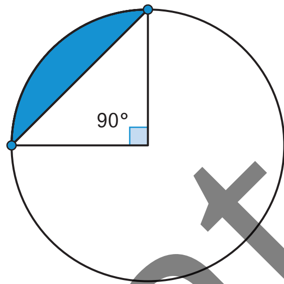
c Un sector con un radio de x cm y un ángulo central de 50° tiene un área igual a 8π cm^2.

Halle la longitud del radio x.

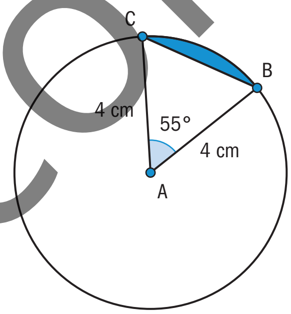


3 Determine el área de la región sombreada de una zona arbolada de un parque circular si el radio del círculo es:

a 8 m **b** 12 m



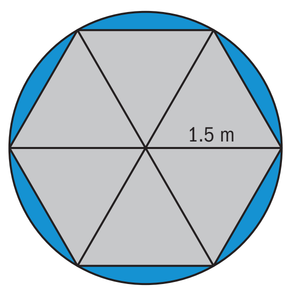
4 Halle el área de un segmento limitado por la cuerda [BC] y subtendido por un arco de 4 cm de radio y un ángulo central de 55°.



5 Una paisajista construye un patio hexagonal en un jardín circular. El área que no está cubierta por el patio quedará cubierta con césped.

El radio del jardín es de 1,5 m.

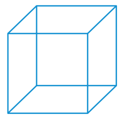
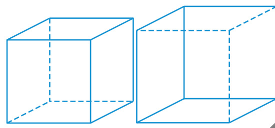
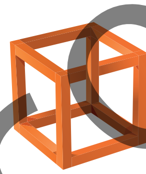
Halle el área del jardín cubierta por el césped.



Mentalidad internacional

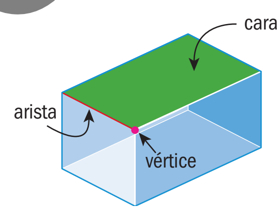
El matemático japonés Seki Takakazu calculó π con una aproximación de 10 cifras decimales en el siglo XVII.

2.3 Geometría en 3D: sólidos, área de la superficie y volumen

Este cubo se conoce como el cubo de Necker y muestra las aristas del cubo sin ninguna orientación sobre su profundidad.	
Al mirar el esqueleto del cubo durante un rato, veremos dos imágenes diferentes. Al dibujar el diagrama de un sólido, debemos dibujar con líneas punteadas las aristas que no son visibles. Usar papel cuadriculado puede ayudar a dibujar los lados paralelos y congruentes.	
Este cubo se denomina cubo imposible y fue inventado por el artista holandés M. C. Escher. ¿Por qué cree que el cubo se denomina imposible? ¿Qué tiene de imposible?	

Las figuras que tienen tres dimensiones (largo, ancho y alto) se denominan **sólidos**.

Un **poliedro** es un sólido compuesto por **caras** poligonales que se conectan por segmentos denominados **aristas**. Los puntos donde se encuentran las aristas se denominan **vértices**.

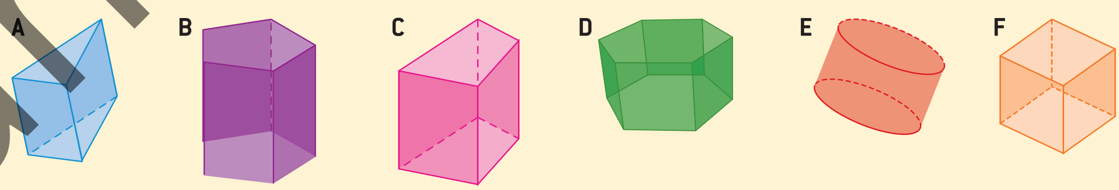


TdC

¿Qué son los sólidos platónicos y por qué son una parte importante del lenguaje de las matemáticas?

Investigación 8

1 A continuación se muestran 6 sólidos:

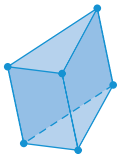
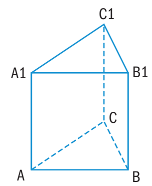


En su grupo, compare los sólidos, analice sus semejanzas y diferencias y complete la tabla.

Dibuje aproximadamente cada sólido. ¿Qué elementos se pueden utilizar para describir estos sólidos?

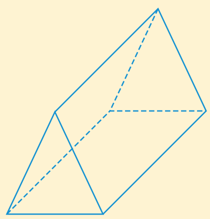
¿Cuáles de estos sólidos son poliedros? ¿Hay sólidos que no lo sean?

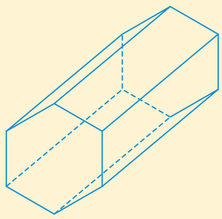
Continúa en la página siguiente.

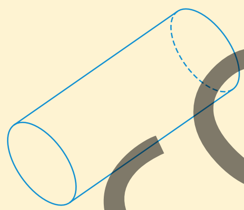
Sólido	Nombre	Descripción	Dibujo aproximado	Elementos más importantes
A 	Prisma triangular	6 vértices 2 caras triangulares iguales 3 caras rectangulares 9 aristas		Altura (h) Elementos de la base: lado y altura correspondiente, o dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

2 ¿Qué ejemplos hay en la vida real de los sólidos de la tabla?

El nombre de los prismas depende de la forma de su base.

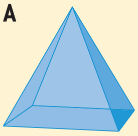

Prisma triangular

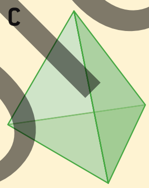
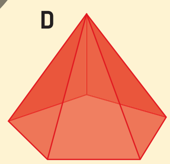
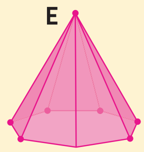
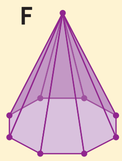

Prisma hexagonal


Cilindro

Investigación 9

1 A continuación se muestran 6 sólidos:

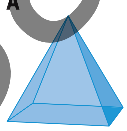
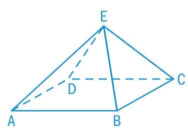
A

B

C

D

E

F


En su grupo, compare los sólidos, analice sus semejanzas y diferencias y complete la tabla.

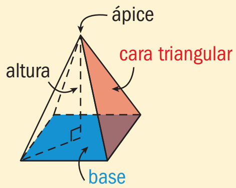
Dibuje aproximadamente cada sólido.

¿Qué elementos se pueden utilizar para describir estos sólidos?

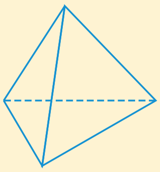
Sólido	Nombre	Descripción	Dibujo aproximado	Elementos más importantes
A 	Pirámide rectangular	5 vértices 1 base rectangular 4 caras triangulares (las caras opuestas son congruentes) 8 aristas		Altura (h) Elementos de la base: largo y ancho

2 ¿Qué ejemplos hay en la vida real de los sólidos de la tabla?

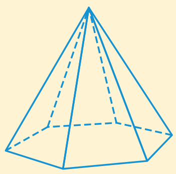
La base de una **pirámide** es un polígono, y las tres o más caras triangulares de la pirámide se juntan en un punto denominado ápice. En una pirámide recta, el ápice se sitúa verticalmente sobre el centro de la base.
La figura rotulada que se muestra a continuación es una pirámide de base cuadrada, pero también hay pirámides de base triangular (tetraedros), pirámides de base hexagonal y así, sucesivamente.



Pirámide de base cuadrada

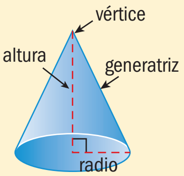


Tetraedro

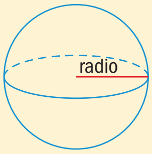


Pirámide de base hexagonal

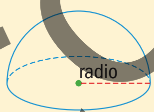
Existe cierta relación entre las pirámides y los conos. La única diferencia es que la base de un cono es un círculo.
Una esfera se define como el conjunto de puntos en el espacio tridimensional que son equidistantes de un punto central. Una semiesfera es la mitad de una esfera.



Cono



Esfera



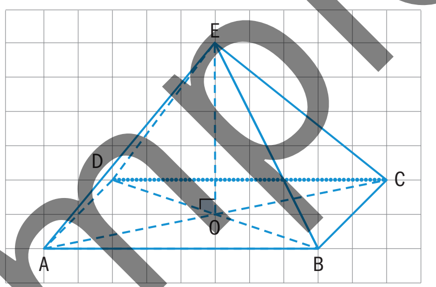
Semiesfera

Mentalidad internacional

Las rocas que se usaron para hacer las pirámides en Egipto fueron construidas con una cuerda de 13 nudos replicando la figura de un triángulo 3-4-5 para asegurarse de que sus lados formaran ángulos rectos.

Ejemplo 17

Dibuje aproximadamente una pirámide de base rectangular.



Si es posible, usar papel cuadriculado, ya que así es más fácil dibujar segmentos paralelos y congruentes con la misma longitud, como [AB] y [DC], y también [AD] y [BC].

Dibujar con línea punteada las aristas invisibles, como [AD] y [DC], y otros segmentos invisibles como [AC] y [BD].

La altura [EO] debería ser perpendicular a [AC] y [BD].

Rotular todos los vértices.

Ejercicio 2E

1 Dibuje aproximadamente un cubo con aristas de 3 cm.

2 Dibuje aproximadamente un prisma de 5 cm de longitud con una base rectangular de lados de 3 cm y longitud de 5 cm.

3 **a** Dibuje aproximadamente una pirámide de base rectangular con una base de 3 cm por 4 cm y una altura inclinada de 5 cm.

b Dibuje aproximadamente una pirámide de base rectangular con una base de 3 cm por 4 cm y una altura vertical de 5 cm.

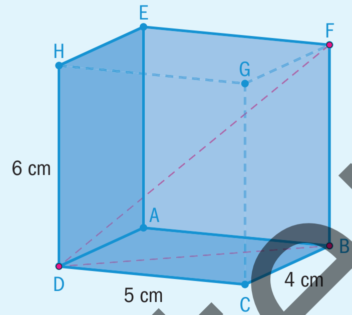
Ejemplo 18

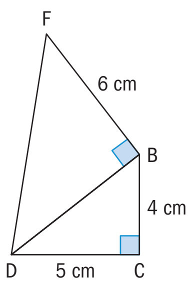
El diagrama muestra el ortoedro ABCDEFGH, con unas dimensiones de 4 cm, 5 cm y 6 cm.

Halle:

a La longitud de la diagonal [DF].

b La amplitud de BD̂F.



	Para hallar la longitud de [DF], hay que encontrar un triángulo rectángulo en el cual [DF] sea lado.
a $DF = \sqrt{CD^2 + BC^2 + BF^2}$ $= \sqrt{5^2 + 4^2 + 6^2}$ $= \sqrt{77}$ $= 8{,}77$ cm (3 cs)	En ΔDBF, $DF = \sqrt{BD^2 + BF^2}$ y $BD^2 = CD^2 + BC^2$ en ΔDBC
b $\operatorname{sen} B\hat{D}F = \dfrac{6}{\sqrt{77}}$ $B\hat{D}F = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{6}{\sqrt{77}}\right) = 43{,}1°$ (3 cs)	$\operatorname{sen} B\hat{D}F = \dfrac{BF}{DF}$

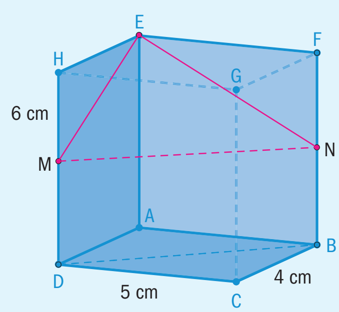
Podemos usar el teorema de Pitágoras y la trigonometría para calcular longitudes y ángulos de figuras tridimensionales.

Ejemplo 19

El diagrama muestra el ortoedro ABCDEFGH, con unas dimensiones de 4 cm, 5 cm y 6 cm.

M y N son los puntos medios de [DH] y [BF] respectivamente.

Halle NÊM.



Continúa en la página siguiente.

$\cos N\hat{E}M = \dfrac{EN^2 + EM^2 - MN^2}{2 \times EN \times EM}$	Considerar ΔEMN. Se puede usar el teorema del coseno para hallar $N\hat{E}M$.
$MN^2 = AB^2 + AD^2 = 41$	$MN = BD$
$EN^2 = EF^2 + FN^2 = 34$	$[EN]$ es la hipotenusa de ΔEFN.
$EM^2 = EH^2 + HM^2 = 25$	$[EM]$ es la hipotenusa de ΔEHM.
$N\hat{E}M \cos^{-1}\dfrac{34 + 45 - 41}{2 \times \sqrt{34} \times \sqrt{25}} = 72{,}0°$ (3 cs)	Sustituir las longitudes en la fórmula del teorema del coseno.

Ejemplo 20

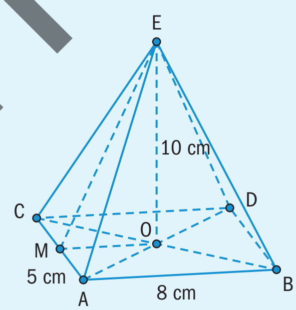
Una pirámide de base rectangular ABCDE tiene una base con dimensiones de 8 cm y 5 cm, y una altura vertical de 10 cm. O es el centro de la base y está directamente debajo del ápice E.

Halle la amplitud del ángulo:

a Formado entre la arista [BE] y la base ABDC de la pirámide.

b Formado entre las aristas [EB] y [EC].

c $E\hat{M}O$, donde M es el punto medio de [AC].



a $\tan E\hat{B}O = \dfrac{OE}{OB}$	Dado que EO es la altura de la pirámide, el ángulo entre [EB] y la base es $E\hat{B}O$.
$OB = \dfrac{\sqrt{8^2 + 5^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{89}}{2}$	Considerar el triángulo rectángulo ΔEBO; se puede usar la razón tangente para hallar $E\hat{B}O$. O es el punto medio de [CB].
$E\hat{B}O = \tan^{-1}\dfrac{10}{\frac{\sqrt{89}}{2}} = 64{,}7°$ (3 cs)	
b $B\hat{E}C = 2\, B\hat{E}O$ $B\hat{E}O = 180 - (90 + 64{,}7467\ldots) = 25{,}2532\ldots$ $B\hat{E}C = 50{,}5°$ (3 cs)	La recta [EO] corta en dos $B\hat{E}C$.
c $\tan E\hat{M}O = \dfrac{OE}{OM} = \dfrac{10}{4}$ $E\hat{M}O = \tan^{-1}\dfrac{10}{14} = 68{,}2°$ (3 cs)	M es el punto medio de [AC], por lo tanto, $OM = 4$ cm.

Geometría y trigonometría

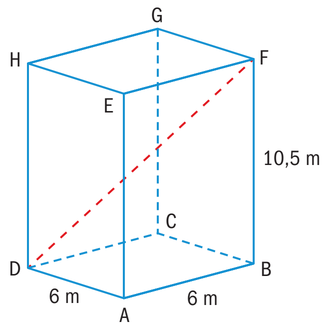
Ejercicio 2F

1 El diagrama de abajo muestra el ortoedro ABCDEFGH con dimensiones de 6 m por 6 m por 10,5 m. Dibuje aproximadamente el ortoedro y marque los ángulos que se describen a continuación.

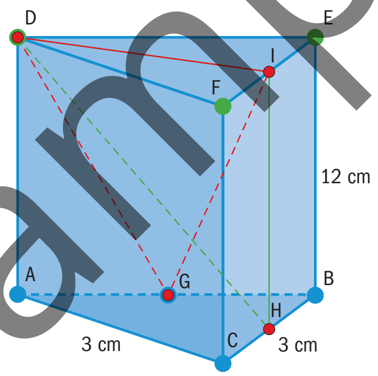
a Halle la longitud de [DF].

b Halle la amplitud del ángulo entre [DF] y la base ABCD.

c Halle la amplitud del ángulo entre [DF] y la cara DCGH.



2 Una caja de cristal con forma de prisma triangular y base regular, ABCDEF, tiene una base de 3 cm de lado y su altura es de 12 cm. H es el punto medio de [BC], G es el punto medio de [AB] e I es el punto medio de [EF]. Dibuje aproximadamente el prisma y marque los ángulos que se describen a continuación. En la caja se guardará una obra de arte con forma triangular que se sujetará a D, G e I.



a Halle el ángulo entre [DH] y la base DEF.

b Halle la longitud de [GI].

c Halle la longitud de [DG].

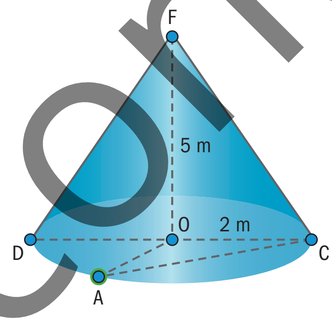
3 Una pila de grano tiene la forma de un cono ADCF con una altura de 5 m y una base con radio de 2 m, como se muestra en el diagrama. A y C son puntos de la circunferencia de la base circular del cono y AÔC = 120°.

Dibuje aproximadamente el cono y rotule los ángulos que se describen a continuación.

a Halle el ángulo entre [AF] y la base del cono.

b Halle la generatriz de la pila de grano.

c Halle el ángulo entre [AF] y [CF].

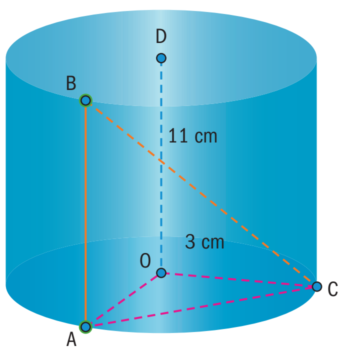


4 El diagrama muestra un cilindro de 11 cm de altura y 3 cm de radio. D y O son los centros de las caras circulares del cilindro. A y C son dos puntos que están en el círculo con centro O y CÂO = 20°. El punto B está sobre la arista de la cara superior del cilindro. Los segmentos [AB] y [OD] son paralelos.

a Halle la longitud de [AC].

b Halle la longitud de [BC].

c Halle el ángulo entre [BC] y la base que tiene centro O.



Desarrollo de sólidos

Investigación 10

Un desarrollo es una representación bidimensional de un objeto tridimensional.

Tabla 1: Desarrollos

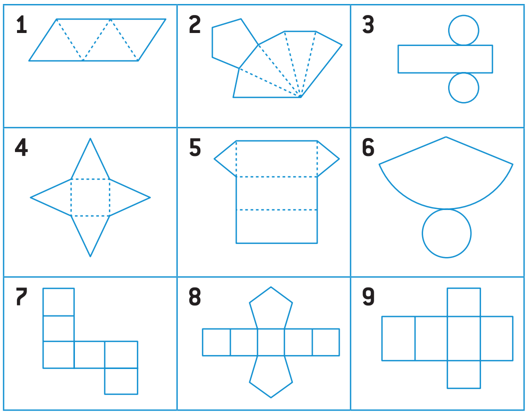
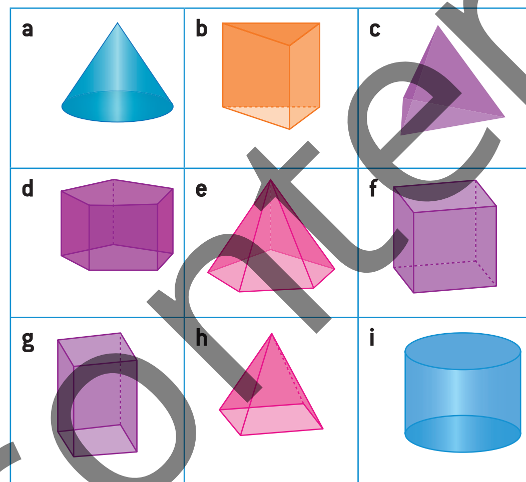


Tabla 2: Sólidos

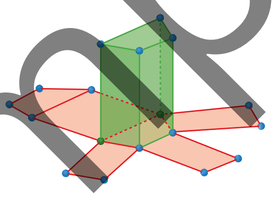


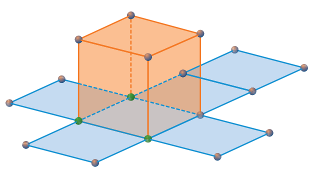
1 Decida cuáles de los desarrollos de la Tabla 1 son desarrollos de sólidos tridimensionales.

2 Empareje cada desarrollo de la Tabla 1 con el sólido que le corresponde de la Tabla 2.

3 Escriba el nombre de cada sólido.

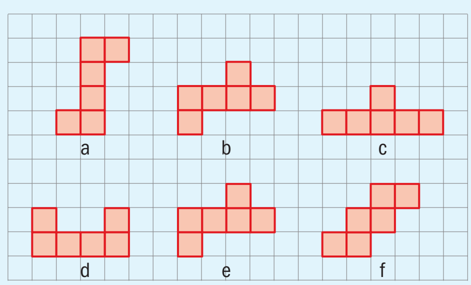
Imaginemos que cortamos un sólido a lo largo de sus aristas y lo abrimos para formar una figura plana. La figura plana se llama desarrollo del sólido. Cada desarrollo bidimensional de un sólido puede doblarse y formar un sólido tridimensional, como se muestra en los siguientes diagramas:





Ejemplo 21

Decida cuál de los siguientes desarrollos puede formar un cubo.



Continúa en la página siguiente.

Los desarrollos que tienen rótulos a, b, e y f pueden doblarse y formar un cubo, mientras que los rotulados con c y d no pueden.	Hacer la comprobación cortando los patrones y ensamblándolos en un cubo. ¿Puede explicar por qué los desarrollos c y d no pueden formar un cubo?

No todos los desarrollos permiten formar una figura tridimensional, aun cuando el número de caras sea la correcta.

Investigación 11

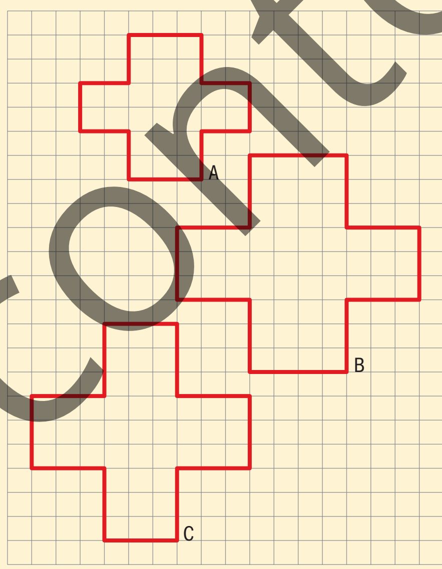
Los diagramas muestran los desarrollos de algunas cajas sin sus tapas.

1 Si corta cada desarrollo, lo dobla para formar una caja y llena la caja con cubos, ¿cuántos cubos necesitaría para llenar la caja? Realice primero una predicción y luego halle el número de cubos. Puede cortar los desarrollos y doblarlos para formar cajas.

2 ¿Qué estrategia utilizó para hallar el número de cubos que llenarían cada caja? ¿Hay distintas estrategias para encontrar ese número?

3 Dado un desarrollo, genere una fórmula para calcular el número de cubos que llenarán la caja creada por el desarrollo. ¿Cómo se relaciona su generalización con la fórmula del volumen para un prisma rectangular ($V =$ longitud $\times$ ancho $\times$ altura)?

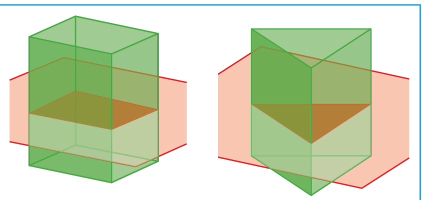
4 Imagine otra caja que contiene el doble de cubos que la caja A. ¿Cuáles son las dimensiones posibles de esta nueva caja que tiene el doble de volumen?



Volumen de un ortoedro = longitud × ancho × altura = área de la base × altura

Volumen de prismas y cilindros

En aquellos sólidos llamados prismas la base tiene la misma forma y tamaño que cualquier sección transversal del sólido que se forma con un plano que es paralelo a la base.



Para hallar el volumen de un prisma, debemos usar la fórmula $V =$ área de la sección transversal $\times$ altura.

TdC

¿Por qué es más fácil trabajar con representaciones simbólicas de objetos tridimensionales que con los modelos físicos?

¿Qué nos dice esto sobre el conocimiento de las matemáticas en otras dimensiones?

Este método se puede utilizar para hallar el volumen de todos los prismas, ya tengan una base rectangular, triangular, hexagonal, octogonal o sean de forma irregular, pero con secciones transversales congruentes.

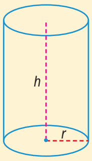
Ejemplo 22

El lago Babreka ("el riñon") está en las montañas Rila, en Bulgaria, y tiene forma de riñón. Tiene un área de 85 000 m^2 y una profundidad media de 28 m. Estime el volumen de agua que hay en el lago, en m^3.

V = área de la sección transversal × altura $V = 85\,000 \times 28$ $V = 2\,380\,000$ m^3	Asumimos que el agua en el lago tiene una forma tridimensional con una sección transversal uniforme con forma de riñón (como se muestra en la foto). La profundidad del lago es la misma que la altura del agua.

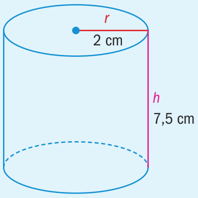
Un cilindro es un caso particular de prisma, con una sección transversal circular.

El volumen de un cilindro en el que el radio de la sección transversal es r y la altura es h es $\pi r^2 h$.



Ejemplo 23

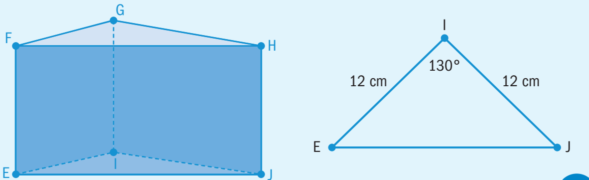
Calcule el volumen de un cilindro con un radio de 2 cm y una altura de 7,5 cm.



Volumen = $\pi \times 2^2 \times 7{,}5 = 94{,}2$ cm^3 (3 cs)	Área de la sección transversal = πr^2.

Ejemplo 24

Halle el volumen de un prisma cuya base es un triángulo isósceles en la que los lados iguales miden 12 cm y forman un ángulo de 130°. La altura del prisma es de 15 cm.

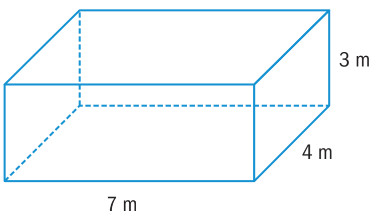


Continúa en la página siguiente.

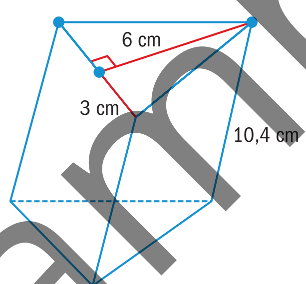
$V = \dfrac{12 \times 12 \times \operatorname{sen} 130°}{2} \times 15$ $= 827\ \text{cm}^3\ \ (3\ \text{cs})$	Para hallar el volumen necesitamos hallar el área de la base triangular, para lo cual podemos usar la fórmula del área de un triángulo. Hay que recordar que el volumen se mide en unidades cúbicas.

Ejercicio 2G

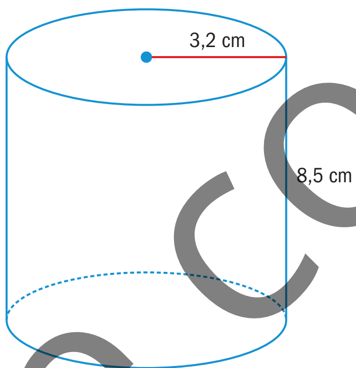
1 Una piscina con las dimensiones que se muestran a continuación se llena con agua. El costo de llenarla es de 1,50 USD por metro cúbico de agua. Halle el costo total de llenar la piscina.



2 Un adorno se hace con forma de prisma triangular. Se fabrica en madera de caoba, con una densidad de 0,71 g/cm^3. Calcule la masa del adorno.



3 Un cilindro sólido de metal tiene las siguientes dimensiones:



El cilindro se funde para formar cubos de 2 cm de arista.

¿Cuántos cubos se pueden formar?

4 Nazarena llena una jarra medidora con 310 cm^3 de agua. Luego vierte el agua en una jarra cilíndrica con un radio de 4 cm. Halle la altura del agua en cm.

5 El volumen de un prisma cuya base es un hexágono regular es de 2800 cm^3. La altura del prisma es de 14 cm. Halle la longitud del lado, en cm, de la base hexagonal.

TdC

¿Cómo se considera el conocimiento matemático desde una perspectiva sociocultural?

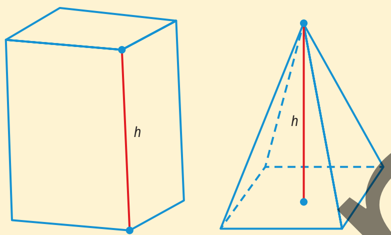
Volumen de pirámides, conos y esferas

Investigación 12

1 Comparación del volumen de prismas y pirámides

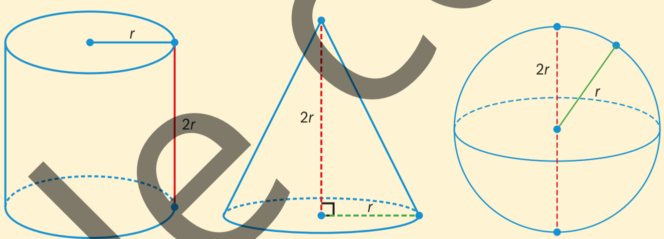
Tome un prisma y una pirámide de plástico que tengan la misma altura y la misma base. Llene con agua la pirámide y luego vierta el agua en el prisma. Repita hasta que el prisma esté completamente lleno.

a ¿Cuál es la relación entre el volumen del prisma y el de la pirámide que tienen la misma base y la misma altura? Haga una conjetura sobre la fórmula del volumen de una pirámide y escríbala.



2 Comparación del volumen de cilindros, conos y esferas

Tome un cilindro, un cono y una esfera de plástico que tengan la misma altura y el mismo radio. Si miramos de cerca la esfera, vemos que $h = 2r$. Usando agua (o arroz o palomitas de maíz), experimente llenando las figuras tridimensionales para determinar las relaciones entre sus volúmenes.



a ¿Cuál es la relación entre el volumen de un cilindro y el de un cono si ambos tienen el mismo radio y la misma altura? Realice una conjetura sobre la fórmula del volumen de un cono y escríbala.

b ¿Cuál es la relación entre el volumen de un cilindro y el de una esfera si ambos tienen el mismo radio y la misma altura? Realice una conjetura sobre la fórmula del volumen de una esfera y escríbala.

c ¿Encontró otra relación entre el volumen de dos de los sólidos? Realice una conjetura y escríbala.

Figura	Pirámide	Prisma	Cono	Cilindro	Esfera
Volumen	$\frac{1}{3}(\text{área de la base} \times h)$	$\text{área de la base} \times h$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$\pi r^2 \times h$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

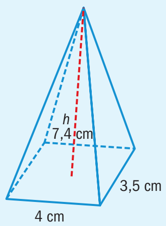
- El volumen de una pirámide es un tercio del volumen de un prisma con la misma base y la misma altura.
- El volumen de un cono es un tercio del volumen de un cilindro con el mismo radio y la misma altura. El volumen del cono también es igual al de una pirámide con la misma área de la base y la misma altura.
- El volumen de una esfera es cuatro veces el volumen de un cono con el mismo radio y una altura que es el doble del radio.

Geometría y trigonometría

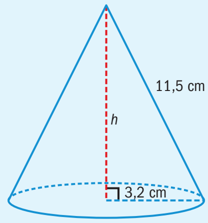
Ejemplo 25

Calcule el volumen de los siguientes sólidos:

a



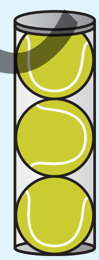
b



a $V = \frac{1}{3}(4 \times 3{,}5 \times 7{,}4) = 34{,}5\ \text{cm}^3$ (3 cs)	Usar $V = \frac{1}{3}(\text{área de la base} \times \text{altura})$
b Altura $= 11{,}5^2 - 3{,}2^2 = 11{,}0458\ldots\ \text{cm}^3$	Usar el teorema de Pitágoras para hallar la altura vertical del cono.
$V = \frac{1}{3}\pi \times 3{,}2^2 \times 11{,}0458\ldots = 118\ \text{cm}^3$ (3 cs)	Usar $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ para hallar el volumen.

Ejemplo 26

Un bote cilíndrico contiene tres pelotas de tenis. Cada pelota tiene 6 cm de diámetro, que es el mismo diámetro del cilindro, y el cilindro está lleno hasta arriba. Calcule el volumen del espacio en el cilindro que no está ocupado por las pelotas de tenis.



Volumen del cilindro $= \pi \times 3^2 \times 18 = 508{,}9\ \text{cm}^3$ Esfera: radio = 3 cm Volumen de 1 pelota $= \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 113{,}1\ \text{cm}^3$ Volumen de las 3 pelotas $= 339{,}3\ \text{cm}^3$ Espacio $= 508.9 - 339{,}3 = 170\ \text{cm}^3$ (3 cs)	El cilindro tiene un radio de 3 cm y una altura de 18 cm.

Mentalidad internacional

En manuscritos chinos e indios de tiempos antiguos se encuentran diagramas del teorema de Pitágoras. Las referencias más antiguas están en las matemáticas de la India.

Ejercicio 2H

1 Calcule el volumen de:

a un cilindro con un radio de 3 cm y una altura de 23 cm;

b una esfera con un radio de 2 cm;

c un cono con un radio de 2,1 cm y una altura de 7,3 cm;

d una semiesfera con un radio de 3,1 cm;

e una pirámide de base rectangular cuya base mide 8 cm de largo y 5 cm de ancho, y con una altura vertical de 17 cm.

2 Una familia va a reemplazar su caldera cilíndrica. No pueden cambiar la altura de la caldera, pero pueden duplicar su diámetro. Si la caldera actual tiene una capacidad de 100 litros, ¿podemos predecir la capacidad de la nueva? ¿Qué pasaría si se triplicara el diámetro de la caldera?

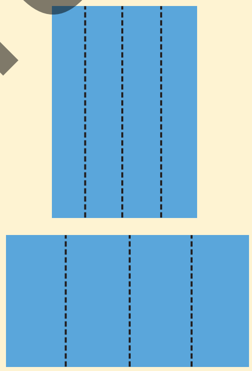
3 La mina Palabora, en Phalaborwa, es una mina de cobre sudafricana. Tiene aproximadamente 2000 m de ancho. De esta mina se han extraído un total de 4,1 millones de toneladas de cobre.

Imagine que la producción total de cobre se compacta en una esfera. El tamaño de esta esfera sería mucho menor que el total del material extraído de la mina. Halle el radio de la esfera de cobre, sabiendo que 1 m^3 de cobre pesa aproximadamente 8930 kg.

Área de la superficie de los sólidos

Investigación 13

Área de la superficie de un prisma



1 Tome dos hojas de papel estándar para imprimir.

Doble una de las hojas a lo largo del lado más largo de manera que se puedan formar cuatro rectángulos congruentes, y doble la otra hoja a lo largo del lado más corto de manera que se puedan formar cuatro rectángulos congruentes. Doble cada hoja para formar dos prismas sin base y use cinta adhesiva para conectar las aristas.

a Halle el área de la superficie de los prismas sin base. ¿Serán los dos valores diferentes o iguales?

b Desarrolle una fórmula para el área de la superficie de cualquier prisma sin base.

c ¿Cuál será la fórmula para el área de la superficie de cualquier prisma con base (el área total de la superficie)?

Área de la superficie de un cilindro

2 Tome dos hojas de papel estándar para imprimir. En una de ellas, una los dos lados más largos para formar un cilindro, y en la otra hoja una los dos lados más cortos para formar otro cilindro. Use cinta adhesiva para conectar las aristas.

a Halle el área de las superficies de los cilindros sin las áreas de las bases. ¿Son iguales o diferentes las áreas de las superficies laterales? Haga una conjetura sobre cómo se comparan las dos áreas de superficie y escríbala.

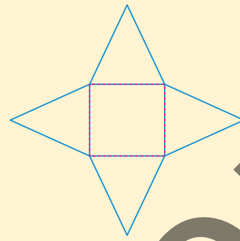
b Haga una conjetura sobre cómo hallar el área de la superficie de cualquier cilindro, con radio r y altura h, sin incluir la base.

c Haga una conjetura sobre cómo hallar el área de la superficie de cualquier cilindro, con radio r y altura h, incluyendo la base.

Continúa en la página siguiente.

Área de la superficie de una pirámide

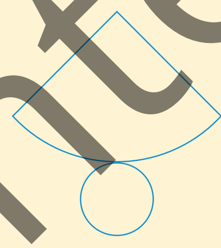
3 En la figura se muestra el desarrollo de una pirámide rectangular (con la base). Doble por las líneas punteadas y use cinta adhesiva para conectar las aristas.



- **a** Halle el área de la superficie de la pirámide sin la base y escríbala.
- **b** Haga una conjetura acerca de cómo hallar el área de la superficie de cualquier pirámide sin incluir la base y escríbala.
- **c** Haga una conjetura acerca de cómo hallar el área de la superficie de cualquier pirámide incluyendo la base (el área total de la superficie) y escríbala.

Área de la superficie de un cono

4 En la figura se muestra el desarrollo de un cono (con la base). Doble el desarrollo para formar un cono y use cinta adhesiva para conectar las aristas.



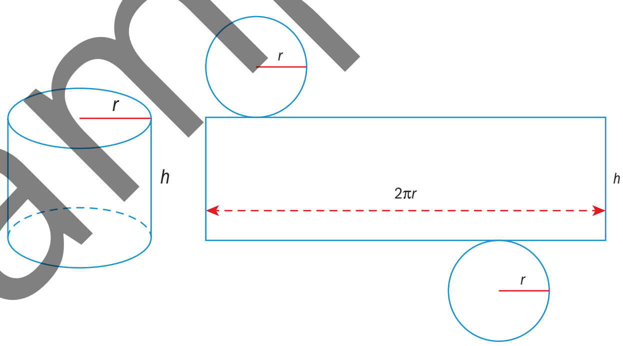
PISTA

La superficie lateral de un cono es un sector de un círculo. ¿Cuál es el radio de este círculo? ¿Cuál es la circunferencia de este círculo? ¿Cuál es el área de este círculo? ¿Podemos encontrar el área de este sector circular?

- **a** Halle el área de la superficie del cono sin la base y escríbala.
- **b** Haga una conjetura acerca de cómo hallar el área de la superficie de cualquier cono sin incluir la base y escríbala.
- **c** Haga una conjetura acerca de cómo hallar el área de la superficie de cualquier cono incluyendo la base (el área total de la superficie) y escríbala.
- **d** **Conceptual** ¿En qué se parecen los procesos de hallar las áreas de la superficie de distintos sólidos? ¿En qué se diferencian?

El área de la superficie se mide en unidades cuadradas, por ejemplo, cm^2 y m^2.

Para calcular el área de la superficie de un cilindro, abra la superficie lateral para formar un rectángulo:



Para hallar el área de la superficie lateral (ASL) de un cilindro utilice la fórmula $\text{ASL} = 2\pi rh$.

Para hallar el área total de la superficie de un cilindro, halle el área de la superficie lateral y súmele las áreas de las dos bases:

Continúa en la página siguiente.

Área de la superficie total $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

La fórmula para el área de la superficie (AS) de una esfera es

$AS = 4\pi r^2$

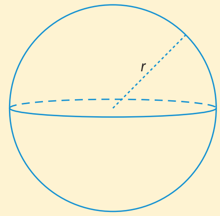
El área de las superficie lateral de un cono utiliza la longitud de la generatriz l:

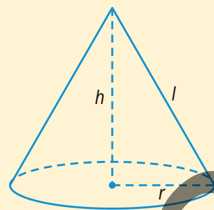
$ASL = \pi rl$

Para hallar el área de la superficie total del cono, sume el área de la base circular:

$AS = \pi rl + \pi r^2$

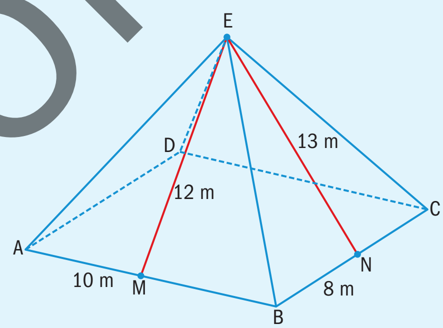
Para hallar el área de la superficie total de una pirámide, sume las áreas de todas las caras.





Ejemplo 27

Una pirámide tiene una base rectangular con una dimensión de 10 m por 8 m y las apotemas (alturas de las caras triangulares) de las caras ABE y BCE miden 12 m y 13 m, respectivamente. Halle el área total de la superficie de la pirámide.



Área de la base $= 10 \times 8 = 80$ Área de ABE $= \dfrac{10 \times 12}{2} = 60$ Área de BCE $= \dfrac{8 \times 13}{2} = 52$ Área total de la superficie $= 80 + 2 \times 60 + 2 \times 52 = 304\ \text{m}^2$	Sumar las áreas de todas las caras para hallar el área total de la superficie de la pirámide. La pirámide tiene dos pares de caras congruentes: ABE y DCE; BCE y ADE.

Ejemplo 28

Un cono tiene un radio de 5 cm y el área total de su superficie es 300 m², redondeando al entero más cercano.

Halle:

a La generatriz del cono, l.

b La altura del cono, h.

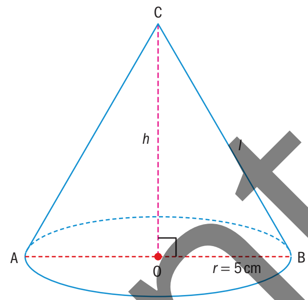
Continúa en la página siguiente.

a $300 = \pi \times 5 \times l + \pi \times 5^2$

$l = 14{,}0985... = 14{,}1$ cm (3 cs)

Área total de la superficie $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

Sustituir los valores dados y luego usar la CPG para hallar la generatriz, l. En el caso de que no se proporcione un diagrama, realizar un diagrama aproximado para poder analizar qué datos se conocen y cuáles se necesitan hallar.



b $h^2 = l^2 - r^2$

$h = \sqrt{14{,}0985...^2 - 5^2} = 13{,}2$ cm (3 cs)

Una vez que se conocen el radio y la generatriz, hallar la altura, h, en el triángulo OBC utilizando el teorema de Pitágoras.

Hay que recordar usar el valor de l sin redondear en el cálculo para hallar h.

Ejercicio 2I

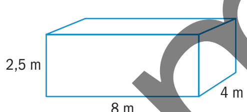
1 Halle el área de la superficie de los siguientes sólidos:

a Un cilindro con un radio de 2,5 cm y una altura de 7,3 cm.

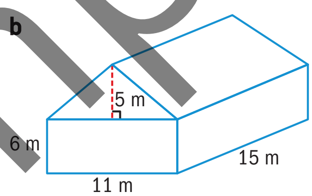
b Un cono con un radio de 3,5 cm y una altura de 12 cm.

2 Halle el área de la superficie de los siguientes sólidos:

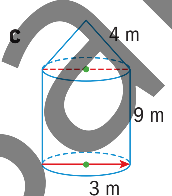
a



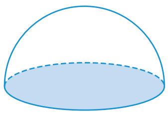
b



c



3 Halle el área de la superficie de una semiesfera con un radio de 4 cm.



4 Un silo tiene una parte cilíndrica y un techo que es una semiesfera. El radio del cilindro es de 3 m y su altura de 12 m.

a Halle el volumen del silo.

b Se va a pintar todo el silo. Halle cuánta pintura es necesaria si se sabe que 1 litro de pintura cubre una superficie de $8{,}5$ m^2.

Desarrollo de sus herramientas

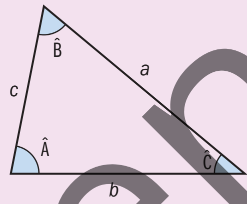
Ahora realice la actividad de modelización e investigación de la página 92.

Resumen del tema

El teorema del seno

- Para cualquier triángulo ΔABC, donde a es la longitud del lado opuesto a $\hat{A}$, b es la longitud del lado opuesto a $\hat{B}$ y c es la longitud del lado opuesto a $\hat{C}$,

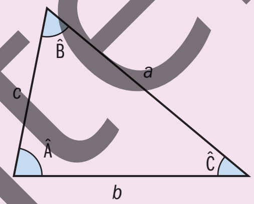
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \text{ o } \frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{a} = \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{b} = \frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{c}$$



El teorema del coseno

- Para ΔABC, donde a es la longitud del lado opuesto a $\hat{A}$, b es la longitud del lado opuesto a $\hat{B}$ y c es la longitud del lado opuesto a $\hat{C}$:

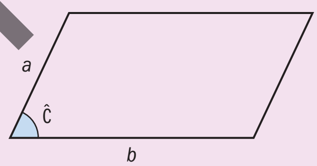
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$



Fórmula del área de un triángulo

- El área de cualquier triángulo ΔABC viene dada por la fórmula

$$\text{Área} = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\hat{A} \text{ o Área} = \frac{1}{2}ac\operatorname{sen}\hat{B} \text{ o Área} = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C}.$$

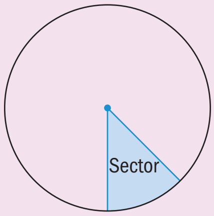


Área de un paralelogramo

- El área del paralelogramo ABCD viene dada por la fórmula $\text{Área} = ab\operatorname{sen}\hat{C}$.

Sector

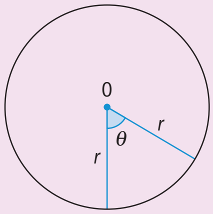
- Un sector es una parte del círculo que se encuentra entre dos radios y el arco subtendido.



Área de un sector circular

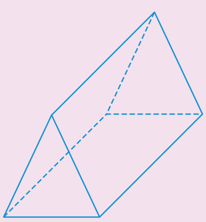
- $\text{Área de un sector circular} = \frac{\theta\pi r^2}{360}$,

donde r es el radio del círculo y θ es el ángulo central en grados.

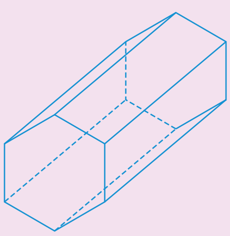


Sólidos

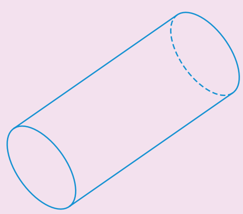
- Un prisma es un sólido que tiene la misma forma o sección transversal a lo largo de toda su longitud.
- El nombre de los prismas depende de la forma de su base:



Prisma triangular



Prisma hexagonal

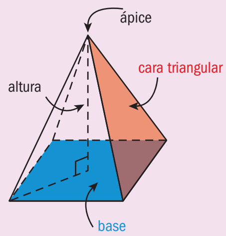


Cilindro

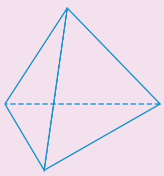
Continúa en la página siguiente.

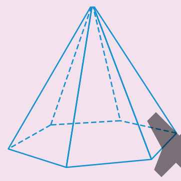
Geometría y trigonometría

- La base de una **pirámide** es un polígono, y las tres o más caras triangulares de la pirámide se juntan en un punto denominado ápice. En una pirámide recta, el ápice está verticalmente sobre el centro de la base.
- Las figuras que se muestran a continuación son ejemplos de pirámides de base cuadrada, tetraedros (pirámide de base triangular) y pirámides de base hexagonal:

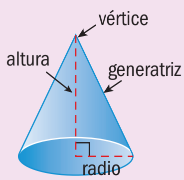


Pirámide de base cuadrada

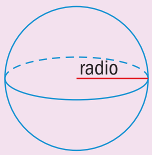

Tetraedro


Pirámide de base hexagonal

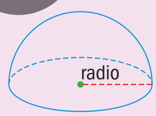
- Existe cierta relación entre las pirámides y los conos. La única diferencia es que la base de un cono es un círculo.
- Una esfera se define como el conjunto de puntos en el espacio tridimensional que son equidistantes de un punto central. Una semiesfera es la mitad de una esfera.



Cono



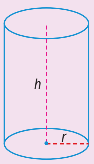
Esfera



Semiesfera

- Volumen de un ortoedro = longitud × ancho × altura = área de la base × altura
- Para hallar el volumen de un prisma, debemos usar la fórmula
  $V =$ área de la sección transversal × altura.
- El volumen de un cilindro en el que el radio de la sección transversal circular es r y la altura es h es $\pi r^2 h$.

Figura	**Pirámide**	**Cono**	**Esfera**
Volumen	$V=\frac{1}{3}(\text{área de la base} \times h)$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

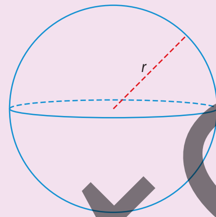


- El volumen de una pirámide es un tercio del volumen de un prisma con la misma base y la misma altura.
- El volumen de un cono es un tercio del volumen de un cilindro con el mismo radio y la misma altura. El volumen del cono también es igual al de una pirámide con la misma área de la base y la misma altura.
- El volumen de una esfera es cuatro veces el volumen de un cono con el mismo radio y con una altura que es el doble del radio.

Continúa en la página siguiente.

- Para hallar el área de la superficie lateral (ASL) de un cilindro utilice la fórmula $\mathrm{ASL} = 2\pi rh$.
- Para hallar el área total de la superficie de un cilindro, halle el área de la superficie lateral y súmele las áreas de las dos bases:

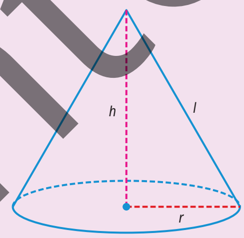
  Área de la superficie total $= 2\pi rh + 2\pi r^2$
- La fórmula para el área de la superficie (AS) de una esfera es $\mathrm{AS} = 4\pi r^2$.



- El área de la superficie lateral de un cono utiliza la longitud de la generatriz l:

  $\mathrm{ASL} = \pi rl$
- Para hallar el área de la superficie total del cono, sume el área de la base circular:

  $\mathrm{AS} = \pi rl + \pi r^2$
- Para hallar el área de la superficie total de una pirámide, sume las áreas de todas las caras.



Desarrollo de las habilidades de indagación

Miremos nuevamente el problema inicial. El radio del monte Everest tiene aproximadamente 16 km, y la profundidad promedio de nieve es de 4 m. Estime la cantidad de nieve en el monte Everest.

Revisión del tema

Haga clic aquí para acceder a ejercicios de repaso.

1 Halle el área de una zona triangular que tiene dos lados con longitudes de 90 m y 65 m, sabiendo que el ángulo comprendido es de 105°.

2 Una estación de seguimiento de aviones localiza dos aviones y determina la distancia desde un punto común O a cada avión y el ángulo entre los aviones. Si el ángulo entre los dos aviones desde O es de 52° y los dos aviones están a 58 km y 75 km de distancia desde O, halle la distancia entre los dos aviones. Escriba su respuesta redondeando a 1 cifra decimal.

3 Un barco deja el puerto A a las 10 a. m. y viaja hacia el norte a una velocidad de 30 km/h. A las 12 a. m., el barco está en el punto B y cambia su curso 20° hacia el este, manteniendo su velocidad.

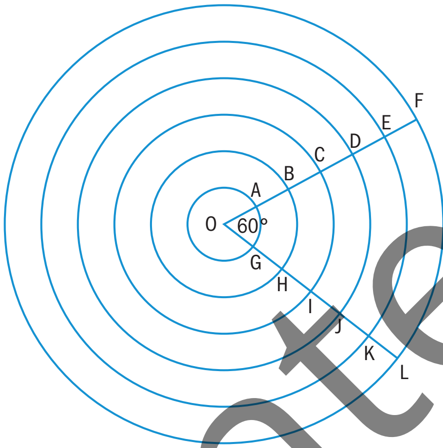
a Determine a qué distancia del puerto está el barco a la 1 p. m., cuando está en el punto C. Escriba su respuesta redondeando al entero más cercano.

b Determine el ángulo CÂB.

4 Un sector circular tiene un radio de 5 cm y un ángulo central de 45°. Halle el área del sector y la longitud del arco.

5 Un sector circular tiene un radio de 4 cm y la longitud del arco correspondiente es igual a 1,396 cm, redondeados a la milésima de centímetro más cercana. Halle el área del sector.

6 En el diagrama se muestran seis círculos concéntricos con centro O, donde OA = 10 cm, OB = 20 cm, OC = 30 cm, OD = 40 cm, OE = 50 cm y OF = 60 cm.



a Halle la longitud del arco AG.

b Halle la longitud del arco BH.

c Halle la longitud del arco CI.

d Describa la relación entre las longitudes de los arcos AG, BH y CI, y halle las longitudes de los arcos [DJ] y [EK] sin calcularlo.

e Determine el área del sector OFL.

7 La razón del área de la superficie al volumen (AS:V) es una medida importante en biología. Las células vivas solo pueden obtener materiales (como la glucosa y el oxígeno) y pueden expulsar productos desechables a través de la membrana celular. Cuanto más grande sea el área de la superficie de la membrana celular con respecto al volumen de la célula, esta será “servida” más rápidamente.

a Calcule el área de la superficie, el volumen y la razón del área de la superficie al volumen (AS:V) para cada una de las siguientes formas:

i Cubos

Lado	1 cm	2 cm	4 cm
Área de la superficie			
Volumen			
Razón del área de la superficie al volumen, AS:V			

ii Esferas

Diámetro	1 cm	2 cm	4 cm
Área de la superficie			
Volumen			
Razón del área de la superficie al volumen, AS:V			

iii Cilindros

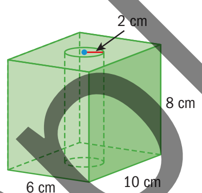
Diámetro × longitud	**1 cm × 1 cm**	**1 cm × 2 cm**	**1 cm × 4 cm**
Área de la superficie			
Volumen			
Razón del área de la superficie al volumen, AS:V			

iv Ortoedros

Lado de la base × longitud	**1 cm × 1 cm**	**1 cm × 2 cm**	**1 cm × 4 cm**
Área de la superficie			
Volumen			
Razón del área de la superficie al volumen, AS:V			

b Explique a qué conclusión ha llegado sobre cuál es la mejor forma (y tamaño) que deben tener las células para que puedan adquirir una mayor razón del área de la superficie al volumen, AS:V.

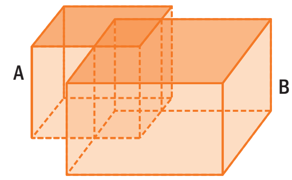
8 Una cerradura de hierro tiene las dimensiones que se muestran en el diagrama siguiente:



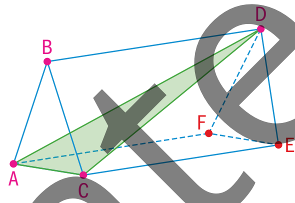
a Halle el volumen de la cerradura.

b Halle el área de la superficie de la cerradura.

9 Los edificios A y B son prismas rectangulares con una altura de 8 m, como se muestra en el diagrama. La longitud del edificio A es de 10 m y su ancho es de 7,5 m. La longitud del edificio B es de 22 m y su ancho es de 11 m. Los dos edificios se cortan, y la intersección forma un prisma con una base cuadrada de 5 m de lado. Halle el volumen del edificio combinado.

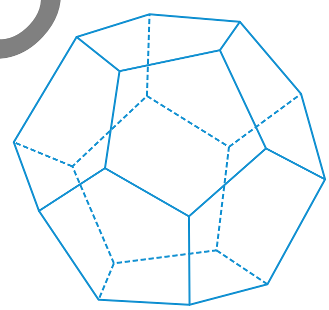


10 Un prisma triangular ABCDEF tiene aristas AB = BC = 6 cm, AC = 4 cm y BD = 8 cm.

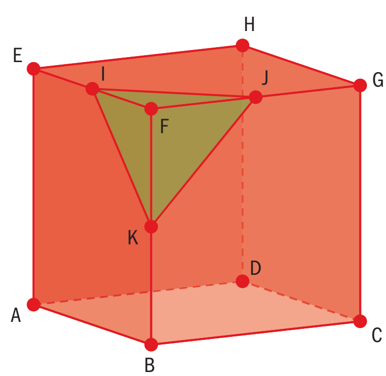


Calcule el área de ΔACD. Escriba su respuesta redondeando a 1 cifra decimal.

11 Un dodecaedro regular tiene aristas de 2 cm. Calcule el área de su superficie.



12 El cubo ABCDEFGH tiene lados de 6 cm de longitud. I, J y K son los puntos medios de las aristas [EF], [FG] y [FB] respectivamente. Desde el vértice F se ha cortado la pirámide IJKF, como se muestra en el diagrama. Halle el volumen de la figura que queda y el área de la superficie del cubo.



Geometría y trigonometría

Preguntas tipo examen

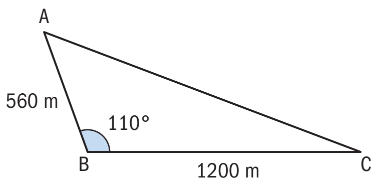
13 P1: Los límites de un terreno triangular tienen longitudes de 170 m, 195 m y 210 m.

a Halle la amplitud del ángulo interior más grande del terreno. (3 puntos)

b A partir de lo anterior, halle el área del terreno, y redondee a 3 cs. (3 puntos)

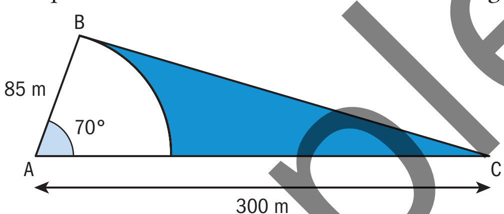
14 P1: Para ir desde su casa (A) al colegio (C), Óscar tiene la opción de ir por las calles rectas AB y BC o de tomar un atajo (AC) a través de un terreno.

Halle cuánto más corto será su camino si elige ir por el atajo.



(5 marks)

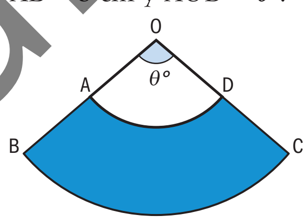
15 P1: El diagrama muestra un terreno triangular ABC. Un granjero amarra su caballo en el punto A con una cuerda de 85 m de largo.



Halle, redondeando a 3 cs, el área del terreno que el caballo no puede alcanzar. (6 puntos)

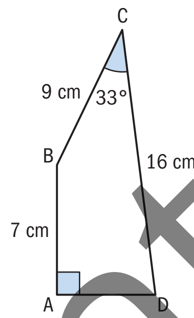
16 P1: En el siguiente diagrama, la figura plana ABCD es parte de un sector circular.

$OA = AB = 8$ cm y $A\hat{O}D = \theta°$.



Sabiendo que el área de ABCD es de 200 cm^2, determine el valor de θ. Escriba su respuesta redondeando al grado más cercano. (5 puntos)

17 P1: El diagrama muestra el cuadrilátero ABCD.



a Halle el perímetro del cuadrilátero. (5 puntos)

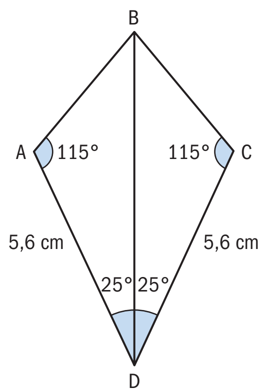
b Halle el área del cuadrilátero. (3 puntos)

18 P1: En ΔABC, $A\hat{C}B = 67°$, $AB = 6.9$ cm y $BC = 5.7$ cm.

a Calcule el ángulo $B\hat{A}C$. (3 puntos)

b A partir de lo anterior, halle el área de ΔABC. (3 puntos)

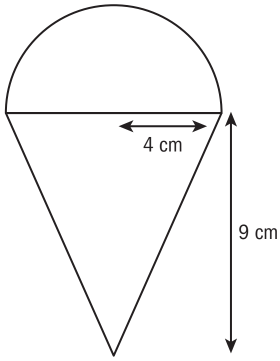
19 P1: Un colgante ABCD está hecho con cinco piezas rectas de cable de metal, como se muestra en el diagrama:



Calcule la longitud total de cable necesaria para hacer el colgante. (7 puntos)

20 **P1:** Un cucurucho de helado consiste en un cono circular y una semiesfera de helado que se unen en la cara circular.

La semiesfera tiene un radio de 4 cm y la altura perpendicular del cono es de 9 cm.

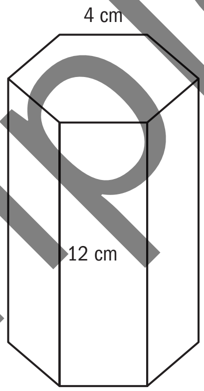


a Halle el volumen total del helado y del cono, y escriba su respuesta en función de π. (4 puntos)

b Halle el área total de la superficie, y redondee su respuesta a 3 cs. (5 puntos)

21 **P1:** El diagrama muestra un prisma de base hexagonal de 12 cm de altura.

Las aristas de cada cara hexagonal miden 4 cm.



a Dibuje un desarrollo del prisma. (2 puntos)

b Calcule el volumen del prisma. (3 puntos)

c Calcule el área total de la superficie del prisma. (2 puntos)

22 **P1:** Alan y Beatriz están de pie sobre un suelo horizontal, a una distancia de 115 m.

Alan ve un pájaro en el cielo con un ángulo de elevación de 27° desde donde está.

Beatriz ve el mismo pájaro con un ángulo de elevación de 42°.

Alan y Beatriz están de pie en el mismo lado del pájaro, y ambos están en el mismo plano vertical que el pájaro.

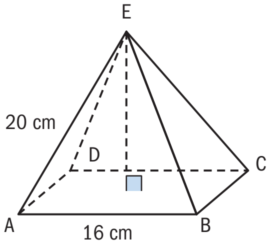
a Determine la distancia directa entre Alan y el pájaro. (4 puntos)

b Determine la altitud a la que está volando el pájaro. (2 puntos)

23 **P1:** ABCDE es una pirámide de base cuadrada.

El vértice E está ubicado directamente sobre el centro de la cara ABCD.

AB = 16 cm y AE = 20 cm



a Calcule el ángulo entre el segmento [AE] y el plano ABCD. (4 puntos)

b Calcule el ángulo entre la cara plana BCE y la cara ABCD. (4 puntos)

c Calcule el ángulo entre el segmento [AE] y el segmento [EC]. (2 puntos)

d Halle el volumen de la pirámide. (2 puntos)

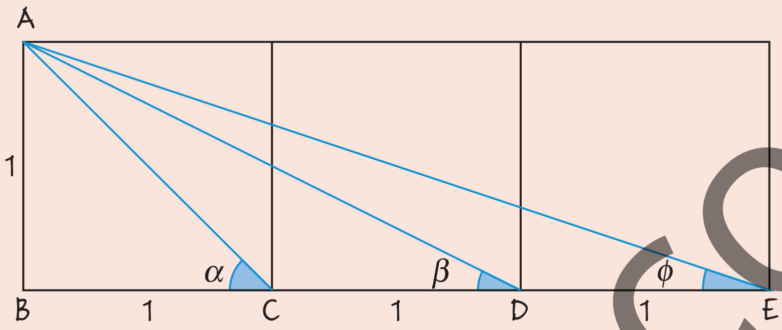
e Halle el área total de la superficie de la pirámide. (3 puntos).

Tres cuadrados

Enfoques del aprendizaje: investigación, pensamiento crítico
Criterios de la exploración: compromiso personal (C), uso de las matemáticas (E)
Temas del IB: prueba, geometría, trigonometría

El problema

Tres cuadrados idénticos con lados de longitud 1 son adyacentes uno con el otro. Un segmento conecta una esquina del primer cuadrado con su esquina opuesta del mismo cuadrado; otro segmento la conecta con la esquina opuesta del segundo cuadrado, y un tercer segmento la conecta con la esquina opuesta del tercer cuadrado, como se muestra en este diagrama:



Halle la suma de los tres ángulos α, β y ϕ.

Exploración del problema

Fíjese en el diagrama. ¿Cuál podría ser la respuesta?

Utilice un transportador si es necesario.

¿Cómo llegó a esta conjetura?

¿Es convincente?

Esta no es una verdad matemática aceptada. Es una conjetura basada en la observación.

Ahora tiene la conjetura $\alpha + \beta + \phi = 90°$ que deberá ser probada matemáticamente.

Prueba directa

¿Cuál es el valor de α?

Sabiendo que $\alpha + \beta + \phi = 90°$, ¿qué le dice esto acerca de α y $\beta + \phi$?

¿Cuáles son las longitudes de las tres hipotenusas de ΔABC, ΔABD y ΔABE?

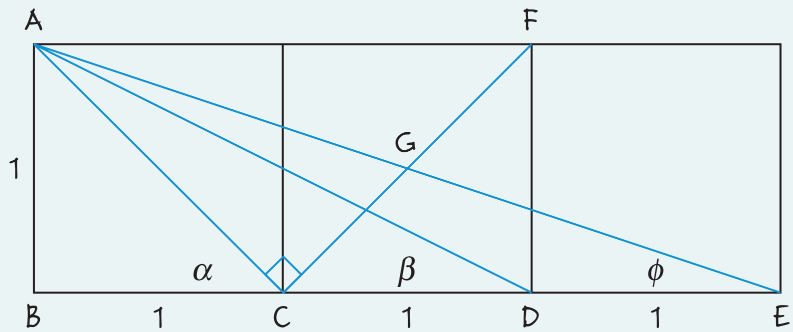
A partir de lo anterior, explique cómo sabe que ΔACD y ΔACE son semejantes.

Por lo tanto, ¿qué puede concluir acerca de $C\hat{A}D$ y $C\hat{E}A$?

A partir de lo anterior, determine por qué $A\hat{C}B = C\hat{A}D + A\hat{D}C$ y concluya la prueba.

Prueba en la que se utiliza un segmento auxiliar

Se dibuja en el segundo cuadrado un segmento diagonal auxiliar, [CF]. La intersección entre [CF] y [AE] se rotula G:



Explique por qué $B\hat{A}C = \alpha$.

Explique por qué $E\hat{A}F = \phi$.

Si demuestra que $G\hat{A}C = \beta$, ¿cómo completará esto la prueba?

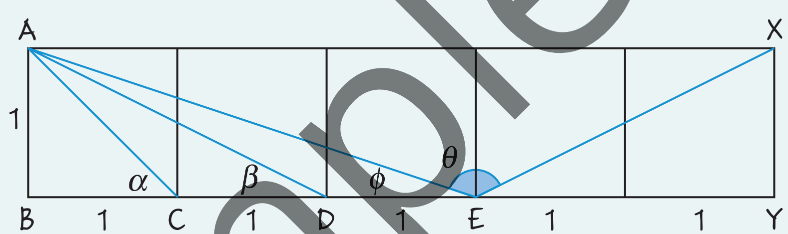
Explique cómo sabe que ΔGAC y ΔABD son semejantes.

A partir de lo anterior, explique cómo sabe que $G\hat{A}C = B\hat{D}A = \beta$.

A partir de lo anterior, complete la prueba.

Prueba en la que se utiliza el teorema del coseno

Se extiende el diagrama y los vértices adicionales del rectángulo grande se rotulan X e Y, y el ángulo se rotula θ:



Explique por qué $X\hat{E}Y = \beta$.

Calcule las longitudes de [AE] y de [AY].

Ahora calcule $A\hat{E}Y$ (θ) usando el teorema del coseno.

A partir de lo anterior, explique cómo sabe que $\beta + \phi = 45°$.

A partir de lo anterior, complete la prueba.

Extensión

Investigue otras pruebas en internet.

También podría elaborar su propia prueba.

Una vez que tenga la prueba, no debe dejar de trabajar.

¿Qué podría hacer después?

En la tarea del tema 8, usará el coeficiente de correlación por rangos de Spearman. Como un trabajo futuro de extensión, podría usar los métodos de esta tarea para clasificar estas pruebas y debatir los resultados.