POLINOMIOS

Evaluación A

1. Expresa estas frases con lenguaje algebraico.

a) El cuadrado de la suma de dos números.

b) El producto de dos números consecutivos.

c) La mitad del cubo de un número.

d) Un quinto de la diferencia de dos números.

a) $(a+b)^2$ b) $a \cdot (a+1)$ c) $\dfrac{a^3}{2}$ d) $\dfrac{a-b}{5}$

2. Realiza las siguientes operaciones con monomios.

a) $3x^2y \cdot (-2xy^3z)$ b) $16x^3y^2 : (-4xy^2)$ c) $\dfrac{1}{5}xyz^2 : \left(\dfrac{5}{3}x^2y^2z\right)$ d) $-3ab^2c \cdot 2a^3b$

a) $3x^2y \cdot (-2xy^3z) = -6x^3y^4z$

b) $16x^3y^2 : (-4xy^2) = -4x^2$

c) $\dfrac{1}{5}xyz^2 : \left(\dfrac{5}{3}x^2y^2z\right) = \dfrac{3z}{25xy}$

d) $-3ab^2c \cdot 2a^3b = -6a^4b^3c$

3. ¿Cuál es el valor numérico de estas expresiones para los valores que se indican? Calcula.

a) $2a + 4b - ab$ para $a = -3$, $b = 2$

b) $\dfrac{-3xy^2}{z}$ para $x = -4$, $y = -2$, $z = 5$

c) $2 - z^2 + 3x$ para $z = 1$, $x = -2$

d) $5xy - z^2$ para $x = -1$, $y = 7$, $z = 3$

Ten en cuenta

Al sustituir las variables por valores negativos, lo hacemos siempre entre paréntesis para evitar errores.

a) $2 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 - (-3) \cdot 2 = -6 + 8 + 6 = 8$

b) $\dfrac{-3 \cdot (-4) \cdot (-2)^2}{5} = \dfrac{48}{5}$

c) $2 - 1^2 + 3 \cdot (-2) = 2 - 1 - 6 = -5$

d) $5 \cdot (-1) \cdot 7 - 3^2 = -35 - 9 = -44$

4. De los siguientes valores, señala los que son raíz de este polinomio: $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

a) $x = 0$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = -1$

a) $P(0) = 0^3 - 7 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0 - 12 = 0 - 0 + 0 - 12 = -12 \neq 0 \rightarrow$ No es raíz.

b) $P(2) = 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 - 12 = 8 - 28 + 32 - 12 = 0 \rightarrow$ Sí es raíz.

c) $P(3) = 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 16 \cdot 3 - 12 = 27 - 63 + 48 - 12 = 0 \rightarrow$ Sí es raíz.

d) $P(-1) = (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 16 \cdot (-1) - 12 = -1 - 7 - 16 - 12 = -36 \neq 0 \rightarrow$ No es raíz.

Recuerda

a es raíz de $P(x)$ si $P(a) = 0$.

5. Halla las raíces de $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ y factoriza el polinomio.

Los candidatos a ser raíz del polinomio son los divisores de 18, es decir: ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18

	1	−2	−9	18
2		2	0	−18
	1	0	−9	0

2 es raíz Cociente: $x^2 - 9$

Calculamos cuál de ellos es raíz del polinomio mediante el *método de Ruffini*. El 2 es raíz, por lo que $x - 2$ es un factor. Para encontrar las otras dos raíces, resolvemos la ecuación que nos ha quedado como cociente:

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$$

La factorización es:

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = (x-2)(x-3)(x+3)$$

Recuerda

Los candidatos a raíz entera de un polinomio son los divisores de su término independiente.

Si a es raíz de $P(x)$, entonces $x - a$ es factor de $P(x)$.

6. Desarrolla las siguientes identidades notables.

a) $(3x+2y)^2$ b) $(2x^2-3)^2$ c) $(2x+3y)(2x-3y)$ d) $\left(4xy-\frac{1}{3}x^2\right)^2$

a) $(3x+2y)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 2y+(2y)^2=9x^2+12xy+4y^2$

b) $(2x^2-3)^2=(2x^2)^2-2\cdot 2x^2\cdot 3+3^2=4x^4-12x^2+9$

c) $(2x+3y)(2x-3y)=(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$

d) $\left(4xy-\frac{1}{3}x^2\right)^2=(4xy)^2-2\cdot 4xy\cdot\frac{1}{3}x^2+\left(\frac{1}{3}x^2\right)^2=16x^2y^2-\frac{8}{3}x^3y+\frac{1}{9}x^4$

Recuerda

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

7. Realiza la siguiente división de polinomios: $(6x^6-13x^5-20x^3+50x^2-4):(2x^3-3x^2+1)$

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
6x^6 & -13x^5 & & -20x^3 & +50x^2 & & -4 & 2x^3-3x^2+1 \\
\cline{8-8}
-6x^6 & +9x^5 & & -3x^3 & & & & 3x^3-2x^2-3x-16 \\
\hline
 & -4x^5 & & -23x^3 & +50x^2 & & -4 & \\
 & 4x^5 & -6x^4 & & +2x^2 & & & \\
\hline
 & & -6x^4 & -23x^3 & +52x^2 & & -4 & \\
 & & 6x^4 & -9x^3 & & +3x & & \\
\hline
 & & & -32x^3 & +52x^2 & +3x & -4 & \\
 & & & 32x^3 & -48x^2 & & +16 & \\
\hline
 & & & & 4x^2 & +3x & +12 &
\end{array}
$$

Ten en cuenta

Para evitar errores en la división, es importante dejar huecos en los monomios que son nulos.

8. Realiza las siguientes divisiones mediante el método de Ruffini.

a) $(x^6-4x^4+3x^3-2x^2-5):(x-1)$ b) $(x^4-3x^2+2x+4):(x+2)$

a)

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & 0 & -4 & 3 & -2 & 0 & -5 \\
1 & & 1 & 1 & -3 & 0 & -2 & -2 \\
\hline
 & 1 & 1 & -3 & 0 & -2 & -2 & \boxed{-7}
\end{array}
$$

Cociente: $x^5+x^4-3x^3-2x-2$ Resto: -7

b)

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 2 & 4 \\
-2 & & -2 & 4 & -2 & 0 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & 0 & \boxed{4}
\end{array}
$$

Cociente: x^3-2x^2+x Resto: 4

9. Determina el valor de m para que al dividir $10x^4-6x^3-16x^2+2x+2m$ entre $x-2$ el resto sea 20.

Por el teorema del resto, sabemos que $P(2)=20$.
Sustituyendo en el polinomio:

$P(2)=10\cdot 2^4-6\cdot 2^3-16\cdot 2^2+2\cdot 2+2m=20\rightarrow$
$\rightarrow 160-48-64+4+2m=20\rightarrow 52+2m=20\rightarrow$
$\rightarrow 2m=20-52=-32\rightarrow m=-32:2=-16$

Recuerda

Teorema del resto:
El resto de dividir $P(x)$ entre $x-a$ coincide con el valor numérico $P(a)$.

10. De un triángulo rectángulo se sabe que la hipotenusa mide $2x+5$ cm y uno de los catetos $x-2$ cm. ¿Qué expresión corresponde a la medida del otro cateto?

Resolvemos mediante el teorema de Pitágoras.

El cateto que falta viene dado por la expresión: $\sqrt{(2x+5)^2-(x-2)^2}$

Operando y simplificando:

$$\sqrt{(2x+5)^2-(x-2)^2}=\sqrt{4x^2+20x+25-(x^2-4x+4)}=\sqrt{3x^2+24x+21}$$

Evaluación B

1. Indica el grado, el coeficiente principal y el término independiente de estos polinomios.

a) $7x^5 - 6x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5$

b) $-x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 7$

c) $\frac{x^6}{2} - \frac{4x^5}{3} + \frac{3x^2}{4} + \frac{2x}{7}$

Recuerda

Coeficiente principal: término de mayor grado.

Grado del polinomio: grado del coeficiente principal.

Término independiente: término de grado 0.

a) $7x^5 - 6x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5 \rightarrow$ Grado 5, coeficiente principal 7, término independiente –5.

b) $-x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 7 \rightarrow$ Grado 6, coeficiente principal –1, término independiente –7.

c) $\frac{x^6}{2} - \frac{4x^5}{3} + \frac{3x^2}{4} + \frac{2x}{7} \rightarrow$ Grado 6, coeficiente principal $\frac{1}{2}$, no tiene término independiente.

2. Halla para qué valor de a se cumple que $P(1) = -5$ siendo $P(x) = -x^3 + ax^2 + 5x - 4$.

Sustituyendo en el polinomio:

$P(1) = -1^3 + a \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 4 = -5 \rightarrow -1 + a + 5 - 4 = -5 \rightarrow a = -5$

3. Dados los polinomios $A(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $B(x) = -5x^3 + 2x - 1$ y $C(x) = 4x^2 - 5$, calcula:

a) $A(x) + B(x) + C(x)$ b) $2A(x) - B(x) - C(x)$ c) $A(x) \cdot C(x) - B(x)$

a) $A(x) + B(x) + C(x) = 3x^2 - 2x + 1 + (-5x^3 + 2x - 1) + (4x^2 - 5) =$
$= 3x^2 - 2x + 1 - 5x^3 + 2x - 1 + 4x^2 - 5 = -5x^3 + 7x^2 - 5$

b) $2A(x) - B(x) - C(x) = 2(3x^2 - 2x + 1) - (-5x^3 + 2x - 1) - (4x^2 - 5) =$
$= 6x^2 - 4x + 2 + 5x^3 - 2x + 1 - 4x^2 + 5 = 5x^3 + 2x^2 - 6x + 8$

c) $A(x) \cdot C(x) - B(x) = (3x^2 - 2x + 1)(4x^2 - 5) - (-5x^3 + 2x - 1) =$
$= 12x^4 - 15x^2 - 8x^3 + 10x + 4x^2 - 5 + 5x^3 - 2x + 1 = 12x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 8x - 4$

4. Desarrolla las siguientes identidades notables.

a) $(-3x^2 - 4y)^2$ b) $(-6 + z^2)^2$ c) $(2xy - 4z^2)(2xy + 4z^2)$ d) $\left(1 + \frac{x}{y}\right)^2$

a) $(-3x^2 - 4y)^2 = (3x^2)^2 + 2 \cdot 3x^2 \cdot 4y + (4y)^2 = 9x^4 + 24x^2y + 16y^2$

b) $(-6 + z^2)^2 = 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot z^2 + (z^2)^2 = 36 - 12z^2 + z^4$

c) $(2xy - 4z^2)(2xy + 4z^2) = (2xy)^2 - (4z^2)^2 = 4x^2y^2 - 16z^4$

d) $\left(1 + \frac{x}{y}\right)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1 + \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2}$

Recuerda

$(-a - b)^2 = (a + b)^2$
$(-a + b)^2 = (a - b)^2$

5. Realiza las siguientes divisiones de polinomios entre monomios.

a) $(2x^3y^2 - 5x^2y^2 + 6xy^3) : (-2xy)$ b) $(-6abc + 4ab^2c + 2a^2b^3c) : (3ab)$

a) $(2x^3y^2 - 5x^2y^2 + 6xy^3) : (-2xy) = -x^2y + \frac{5}{2}xy - 3y^2$

b) $(-6abc + 4ab^2c + 2a^2b^3c) : (3ab) = -2c + \frac{4}{3}bc + \frac{2}{3}ab^2c$

6. Observa estas expresiones y extrae factor común en cada caso.

a) $4x^5 - 3x^4 + 6x^3 + 2x^2$

b) $10x^2y - 20x^2z^2$

c) $-3a^2b + 2a^2b^2 - 3ab^2$

d) $10y^2x - 5x^2z + 2x^2t - 3xzt$

a) $4x^5 - 3x^4 + 6x^3 + 2x^2 = x^2\left(4x^3 - 3x^2 + 6x + 2\right)$

b) $10x^2y - 20x^2z^2 = 10x^2\left(y - 2z^2\right)$

c) $-3a^2b + 2a^2b^2 - 3ab^2 = ab\left(-3a + 2ab - 3b\right)$

d) $10y^2x - 5x^2z + 2x^2t - 3xzt = x\left(10y^2 - 5xz + 2xt - 3zt\right)$

7. Resuelve estas divisiones por el método de Ruffini. Recuerda escribir los coeficientes del dividendo ordenados según el grado, sin omitir los términos nulos.

a) $\left(x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 6x + 3\right) : \left(x - 2\right)$

b) $\left(-x^4 + 3x^2 - 5x + 1\right) : \left(x + 1\right)$

a)

	1	−4	0	3	−6	3
2		2	−4	−8	−10	−32
	1	−2	−4	−5	−16	−29

Cociente: $x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 5x - 16$ Resto: −29

b)

	−1	0	3	−5	1
−1		1	−1	−2	7
	−1	1	2	−7	8

Cociente: $-x^3 + x^2 + 2x - 7$ Resto: 8

8. Halla el valor de m para que el polinomio $x^3 + mx^2 - 5x - 6$ sea divisible por $x + 1$.

Si el polinomio dado es divisible por $x + 1$, al hacer la división el resto será igual a 0.

Por tanto, por el teorema del resto, $P(-1) = 0$.

Sustituyendo: $P(-1) = (-1)^3 + m\cdot(-1)^2 - 5\cdot(-1) - 6 = 0 \to -1 + m + 5 - 6 = 0 \to m - 2 = 0 \to m = 2$

9. Encuentra las raíces y factoriza el polinomio: $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

Ten en cuenta

En primer lugar, extraemos factor común si es posible.

Extraemos factor común: $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x\left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right)$

Como un factor es x, entonces, una raíz del polinomio es $x = 0$.

Queda por encontrar, como máximo, tres raíces más porque el polinomio es de grado 4.

Factorizamos el polinomio $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, para lo que buscamos como raíces enteras divisores de −1.

En este caso probamos con 1 y −1 mediante el método de Ruffini.

	1	−3	3	−1
1		1	−2	1
	1	−2	1	0

1 es raíz Cociente: $x^2 - 2x + 1$

Una vez hallada la primera raíz, obtenemos un polinomio de grado 2, por lo que las otras dos raíces las encontramos resolviendo la ecuación de segundo grado que quedó como cociente, $x^2 - 2x + 1 = 0$, y que tiene como solución $x = 1$ (doble).

Las raíces son entonces $x = 0$, $x = 1$ (solución triple).

Por tanto, la factorización es: $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x - 1)$

10. Calcula el volumen de un cubo cuya arista mide $2x - 3$ metros.

El volumen de un cubo de arista l viene dado por la fórmula $V = l^3$. En nuestro caso, $V = (2x - 3)^3$

Haciendo cálculos: $V = \left(2x - 3\right)^3 = \left(2x - 3\right)^2\left(2x - 3\right) = \left(4x^2 - 12x + 9\right)\left(2x - 3\right) =$

$= 8x^3 - 12x^2 - 24x^2 + 36x + 18x - 27 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27\ m^3$

Evaluación C

1. **Expresa mediante lenguaje algebraico las siguientes expresiones.**

a) El cubo del producto de dos números.

b) La suma de dos números pares consecutivos.

c) La diferencia del cuadrado de dos números.

d) La sexta parte de la raíz cúbica de un número.

a) $(x \cdot y)^3$ **b)** $2x + (2x + 2)$ **c)** $x^2 - y^2$ **d)** $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{6}$

2. **Halla el valor numérico del polinomio $x^5 - 4x^3 - 11x^2 + 3x - 7$ para $x = -1$, $x = 3$ y $x = 0$.**

Para $x = -1 \rightarrow (-1)^5 - 4 \cdot (-1)^3 - 11 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 7 = -1 + 4 - 11 - 3 - 7 = -18$

Para $x = -3 \rightarrow (-3)^5 - 4 \cdot (-3)^3 - 11 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) - 7 = -243 + 108 - 99 - 9 - 7 = -250$

Para $x = 0 \rightarrow 0^5 - 4 \cdot 0^3 - 11 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 7 = -7$

3. **Resuelve estas operaciones con polinomios.**

a) $(x^3 - 2x^2)(3x - 7)$

b) $(2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1) - (4x^3 - 2x^2 + 5x - 3)$

c) $(4x^2 - 2x + 1)(-x^3 + 2x^2 + 5x - 3)$

d) $(2x^4 + 5x^3 + x^2 - 6) + (-4x^3 - 2x^2 + x - 1) - (3x^2 + 5x - 6)$

a) $(x^3 - 2x^2)(3x - 7) = 3x^4 - 7x^3 - 6x^3 + 14x^2 = 3x^4 - 13x^3 + 14x^2$

b) $(2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1) - (4x^3 - 2x^2 + 5x - 3) =$
$= 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 3 = 2x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$

c) $(4x^2 - 2x + 1)(-x^3 + 2x^2 + 5x - 3) = -4x^5 + 8x^4 + 20x^3 - 12x^2 + 2x^4 -$
$- 4x^3 - 10x^2 + 6x - x^3 + 2x^2 + 5x - 3 = -4x^5 + 10x^4 + 15x^3 - 20x^2 + 11x - 3$

d) $(2x^4 + 5x^3 + x^2 - 6) + (-4x^3 - 2x^2 + x - 1) - (3x^2 + 5x - 6) =$
$= 2x^4 + 5x^3 + x^2 - 6 - 4x^3 - 2x^2 + x - 1 - 3x^2 - 5x + 6 = 2x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x - 1$

4. **Completa las siguientes identidades notables.**

a) $x^2 + 6xy + 9y^2 = \left(\boxed{x} + \boxed{3y}\right)^2$

b) $4x^2 - 1 = \left(\boxed{2x} + \boxed{1}\right)\left(\boxed{2x} - \boxed{1}\right)$

c) $49x^4 + \boxed{14x^2} + 1 = \left(\boxed{7x^2} + \boxed{1}\right)^2$

d) $x^4 - 10x^2y + 25y^2 = \left(\boxed{x^2} - \boxed{5y}\right)^2$

e) $4x^2 - 20xy + 25y^2 = \left(\boxed{2x} - \boxed{5y}\right)^2$

f) $9 - \boxed{16x^4} = \left(\boxed{3} + 4x^2\right)\left(\boxed{3} - \boxed{4x^2}\right)$

5. **Halla las raíces y factoriza este polinomio: $-3x^3 - 6x^2 + 3x + 6$**

En primer lugar, extraemos factor común y obtenemos: $-3x^3 - 6x^2 + 3x + 6 = -3(x^3 + 2x^2 - x - 2)$

Después, factorizamos el polinomio: $x^3 + 2x^2 - x - 2$

Los candidatos a raíz del polinomio son los divisores de 2, es decir: ± 1, ± 2

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

1 es raíz Cociente: $x^2 + 3x + 2$

Vemos, mediante el método de Ruffini, que 1 es raíz del polinomio. Para encontrar las otras dos raíces, resolvemos la ecuación de segundo grado que ha quedado como cociente: $x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$

La factorización es: $-3x^3 - 6x^2 + 3x + 6 = -3(x + 2)(x + 1)(x - 1)$

6. Resuelve esta división: $(2x^6 - 4x^4 + 10x + 10) : (x^2 - 2x + 5)$

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
2x^6 & & -4x^4 & & & +10x & +10 & x^2-2x+5 \\
\cline{8-8}
-2x^6 & +4x^5 & -10x^4 & & & & & 2x^4+4x^3-6x^2-32x-34 \\
\cline{1-7}
 & 4x^5 & -14x^4 & & & +10x & +10 & \\
 & -4x^5 & +8x^4 & -20x^3 & & & & \\
\cline{2-7}
 & & -6x^4 & -20x^3 & & +10x & +10 & \\
 & & 6x^4 & -12x^3 & +30x^2 & & & \\
\cline{3-7}
 & & & -32x^3 & +30x^2 & +10x & +10 & \\
 & & & 32x^3 & -64x^2 & +160x & & \\
\cline{4-7}
 & & & & -34x^2 & +170x & +10 & \\
 & & & & 34x^2 & -68x & +170 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & 102x & +180 &
\end{array}
$$

7. Resuelve mediante el método de Ruffini.

a) $(x^6 - 4x^4 + 6x^3 + 1) : (x - 2)$

b) $(4x^3 - 5x^2 + 6) : (x - 3)$

a)

	1	0	−4	6	0	0	1
2		2	4	0	12	24	48
	1	2	0	6	12	24	49

Cociente: $x^5 + 2x^4 + 6x^2 + 12x + 24$ Resto: 49

b)

	4	−5	0	6
3		12	21	63
	4	7	21	69

Cociente: $4x^2 + 7x + 21$ Resto: 69

8. Calcula, sin efectuar la división, el resto de dividir $x^4 - x^3 + 5x^2 - 6$ entre $x - 2$.

Según el teorema del resto, el resto de dividir $x^4 - x^3 + 5x^2 - 6$ entre $x - 2$ coincide con el valor numérico al sustituir en el polinomio $x = 2$.

Así pues, el resto es: $2^4 - 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 6 = 16 - 8 + 20 - 6 = 22$

9. Responde razonadamente si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Al sumar o restar dos polinomios de grado 3, el resultado es un polinomio de grado 3.

b) Un polinomio de grado 4 puede tener 4 raíces.

c) El polinomio $x^5 - 4x^3 + 2x - 3$ no tiene coeficiente principal.

d) La división $(2x^3 + 3x^2 - 6x + 3) : (x^2 - 1)$ se puede resolver mediante el método de Ruffini.

a) FALSO. Por ejemplo: $(2x^3 - 3x^2 + 5x + 7) + (-2x^3 + 15x - 3) = -3x^2 + 20x + 4$

b) VERDADERO. Un polinomio de grado n tiene, como máximo, n raíces reales.

c) FALSO. El coeficiente principal es 1.

d) FALSO. El método de Ruffini solo se puede aplicar cuando el divisor es de la forma $x + a$ o $x - a$.

10. El ancho de una caja de cartón mide x metros. Si el alto mide el doble que el ancho, y el largo el triple, calcula en función de x:

a) El volumen de la caja. **b)** El área de la caja.

Si el ancho mide x, el alto mide $2x$ y el ancho $3x$.

a) $V = a \cdot b \cdot c = x \cdot 2x \cdot 3x = 6x^3$

b) $A = 2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot 3x + 2 \cdot 2x \cdot 3x = 22x^2$

Evaluación D

1. ¿De cuál de estos polinomios es $x = -1$ raíz?

a) $P(x) = -x^3 - 1$ **b)** $Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ **c)** $R(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ **d)** $S(x) = x^2 + x + 1$

a) $P(-1) = -(-1)^3 - 1 = 1 - 1 = 0 \rightarrow$ Sí es raíz.

b) $Q(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0 \rightarrow$ Sí es raíz.

c) $R(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -1 + 3 - 3 + 1 = 0 \rightarrow$ Sí es raíz.

d) $S(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0 \rightarrow$ No es raíz.

2. Realiza la siguiente operación con polinomios: $\dfrac{x^2 - 3x}{2} + \dfrac{4x+1}{6} - \dfrac{-x^3 + 5x}{3} + \dfrac{x^2 - 7}{4}$

$$\frac{x^2 - 3x}{2} + \frac{4x+1}{6} - \frac{-x^3 + 5x}{3} + \frac{x^2 - 7}{4} = \frac{6x^2 - 18x}{12} + \frac{8x+2}{12} - \frac{-4x^3 + 20x}{12} + \frac{3x^2 - 21}{12} =$$

$$= \frac{6x^2 - 18x + 8x + 2 - (-4x^3 + 20x) + 3x^2 - 21}{12} =$$

$$= \frac{6x^2 - 18x + 8x + 2 + 4x^3 - 20x + 3x^2 - 21}{12} = \frac{4x^3 + 9x^2 - 30x - 19}{12}$$

3. Desarrolla estas igualdades notables.

a) $(2a - 2z)^2$ **c)** $(3x^2 + 5y)^2$ **e)** $(-1 - x^4)^2$

b) $(4 + y^2)(4 - y^2)$ **d)** $\left(\frac{1}{2} + z^2\right)^2$ **f)** $(x^2 - x^3)^2$

a) $(2a - 2z)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 2z + (2z)^2 = 4a^2 - 8az + 4z^2$

b) $(4 + y^2)(4 - y^2) = 4^2 - (y^2)^2 = 16 - y^4$

c) $(3x^2 + 5y)^2 = (3x^2)^2 + 2 \cdot 3x^2 \cdot 5y + (5y)^2 = 9x^4 + 30x^2y + 25y^2$

d) $\left(\frac{1}{2} + z^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot z^2 + (z^2)^2 = \frac{1}{4} + z^2 + z^4$

e) $(-1 - x^4)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot x^4 + (x^4)^2 = 1 + 2x^4 + x^8$

f) $(x^2 - x^3)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot x^3 + (x^3)^2 = x^4 - 2x^5 + x^6$

4. Extrae factor común en cada caso.

a) $-2x^3y + 3x^2z + 6x^2t - 2xyz$ **c)** $8x^3z + 4x^2y - 2x^2t^2 + 6x^4$

b) $2a^2bc - 3ab^2c + 4abc^2$ **d)** $15xy^2 - 5x^2z + 10y^2z$

a) $-2x^3y + 3x^2z + 6x^2t - 2xyz = x(-2x^2y + 3xz + 6xt - 2yz)$

b) $2a^2bc - 3ab^2c + 4abc^2 = abc(2a - 3b + 4c)$

c) $8x^3z + 4x^2y - 2x^2t^2 + 6x^4 = 2x^2(4xz + y - t^2 + 3x^2)$

d) $15xy^2 - 5x^2z + 10y^2z = 5(3xy^2 - x^2z + 2y^2z)$

5. Halla el dividendo de una división si sabemos que el divisor es $3x - 1$, el cociente $4x^3 + 6x^2 - 5x - 1$ y el resto, 5.

Sabemos que: dividendo es igual a divisor por cociente más resto. Operando:

Dividendo: $(3x - 1)(4x^3 + 6x^2 - 5x - 1) + 5 = 12x^4 + 18x^3 - 15x^2 - 3x - 4x^3 - 6x^2 + 5x + 1 + 5 =$

$= 12x^4 + 14x^3 - 21x^2 + 2x + 6$

6. Resuelve las divisiones mediante el método de Ruffini.

a) $(x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 5x - 1) : (x - 1)$

b) $(x^4 - 4x^3 - 2x^2 + x + 22) : (x - 2)$

a)

	1	4	0	−3	5	−1
1		1	5	5	2	7
	1	5	5	2	7	6

Cociente: $x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 2x + 7$ Resto: 6

b)

	1	−4	−2	1	22
2		2	−4	−12	−22
	1	−2	−6	−11	0

Cociente: $x^3 - 3x^2 - 5x - 4$ Resto: 0

7. Determina el valor de m en el polinomio $x^5 - 4mx^4 - 3x^2 + 5x - 6$ para que al dividirlo entre $x - 1$ el resto sea 12.

Por el teorema del resto, buscamos el valor de m para que $P(1) = 12$.

$$P(1) = 1^5 - 4 \cdot m \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 6 = 12 \to 1 - 4m - 3 + 5 - 6 = 12 \to -4m = 15 \to m = -\frac{15}{4}$$

8. Encuentra las raíces y factoriza este polinomio: $x^3 - 7x^2 + 16x - 2$

Los candidatos a raíz del polinomio son los divisores de −12, es decir: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12

Probamos, mediante el método de Ruffini, cuál de ellos es raíz del polinomio: 2 es raíz, por lo que x − 2 es un factor.

	1	−7	16	−12
2		2	−10	12
	1	−5	6	0

2 es raíz Cociente: $x^2 - 5x + 6$

Para encontrar las otras dos raíces, resolvemos la ecuación de segundo grado que ha quedado como cociente: $x^2 - 5x + 6 = 0 \to \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$, por lo que las otras dos raíces son 2 y 3.

Por tanto, los otros factores son $x - 2$ y $x - 3$.

En resumen, las tres raíces del polinomio son $x = 2$ (doble) y $x = 3$.

La factorización es: $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x - 2)^2(x - 3)$

9. Escribe un polinomio de grado 4 cuyas raíces sean: $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$ y $x = -3$

Si las raíces son $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$ y $x = -3$, entonces los factores son: x, $x + 1$, $x - 2$ y $x + 3$

Multiplicando todos los factores, obtenemos:

$x(x + 1)(x - 2)(x + 3) = (x^2 + x)(x^2 + x - 6) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$

10. El radio de un cilindro mide $2x - 3$ centímetros, y su volumen, $(12x^3 - 36x^2 + 27x)\pi$ centímetros cúbicos. ¿Cuánto mide su altura?

El volumen de un cilindro viene dado por la fórmula: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Sustituyendo esos datos en la ecuación, obtenemos:

$(12x^3 - 36x^2 + 27x)\pi = \pi(2x - 3)^2 h$

Despejando la altura en la ecuación, obtenemos el resultado:

$$h = \frac{(12x^3 - 36x^2 + 27x)\pi}{\pi(2x - 3)^2} = \frac{12x^3 - 36x^2 + 27x}{(2x - 3)^2} = \frac{12x^3 - 36x^2 + 27x}{4x^2 - 12x + 9} = 3x$$

Luego, la altura mide $3x$ cm.