

3 Fracciones

1. Fracciones equivalentes

Vamos a comprobar si las **fracciones** $\frac{3}{4}$ y $\frac{9}{12}$ son **equivalentes**.

Para ello, dividiremos 3 entre 4 y 9 entre 12. Si el resultado de ambas divisiones es el mismo, entonces, diremos que las fracciones son equivalentes.

Como $\frac{3}{4} = 0,75$ y $\frac{9}{12} = 0,75$ entonces, ambas fracciones son equivalentes.

► Podemos obtener una **fracción equivalente** a una dada multiplicando o dividiendo el numerador y el denominador por el **mismo número**. En el caso anterior, vemos que:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

Hemos multiplicado por 3 tanto el numerador como el denominador para obtener dos fracciones equivalentes.

Veamos otro ejemplo: $\frac{6}{8} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}$

Hemos dividido entre 2 numerador y denominador para obtener dos fracciones equivalentes.

► Dos **fracciones** son **equivalentes** si tienen el **mismo valor**.

1. Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las dadas:

a) $\frac{18}{60} =$

b) $\frac{7}{2} =$

c) $\frac{4}{12} =$

d) $\frac{102}{48} =$

e) $\frac{1}{9} =$

f) $\frac{13}{17} =$

g) $\frac{21}{30} =$

h) $\frac{10}{15} =$

Propiedad fundamental de equivalencia

Observa otra forma de comprobar que $\frac{3}{4}$ y $\frac{9}{12}$ son **fracciones equivalentes**.

Realizamos los productos cruzados: $3 \cdot 12$ y $9 \cdot 4$ y si el resultado es el mismo, entonces, las fracciones son equivalentes.

Como $3 \cdot 12 = 36$ y $9 \cdot 4 = 36$, las fracciones son equivalentes.

► Dos **fracciones**, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, son **equivalentes** si al multiplicar el numerador de cada fracción por el denominador de la otra, el resultado es el mismo, es decir, si se cumple lo siguiente: $a \cdot d = b \cdot c$

2. Comprueba si las siguientes fracciones son equivalentes:

a) $\frac{3}{9}$ y $\frac{1}{3}$:

d) $\frac{20}{8}$ y $\frac{10}{4}$:

b) $\frac{10}{3}$ y $\frac{20}{6}$:

e) $\frac{11}{5}$ y $\frac{77}{35}$:

c) $\frac{9}{4}$ y $\frac{3}{2}$:

f) $\frac{24}{12}$ y $\frac{28}{15}$:

3. Completa con el término que falta:

a) $\frac{2}{7} = \frac{12}{\square}$

b) $\frac{9}{8} = \frac{\square}{24}$

c) $\frac{10}{4} = \frac{\square}{8}$

d) $\frac{7}{12} = \frac{21}{\square}$

Simplificación y ampliación de fracciones

Veamos cómo se **simplifica** la fracción $\frac{10}{15} \Rightarrow \frac{10}{15} = \frac{10 : 5}{15 : 5} = \frac{2}{3}$

► Para **simplificar** una fracción, hay que dividir el numerador y el denominador entre un mismo número, en este caso el 5.

Veamos cómo se **amplifica** la fracción $\frac{10}{15} \Rightarrow \frac{10}{15} = \frac{10 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{20}{30}$

► Para **amplificar** una fracción hay que multiplicar el numerador y el denominador por un mismo número, en este caso el 2.

4. Escribe una simplificación de las siguientes fracciones:

a) $\frac{10}{12} =$

b) $\frac{27}{18} =$

c) $\frac{50}{18} =$

d) $\frac{30}{24} =$

5. Escribe una ampliación de las siguientes fracciones:

a) $\frac{10}{12} =$

b) $\frac{27}{18} =$

c) $\frac{50}{18} =$

d) $\frac{30}{24} =$

Fracciones irreducibles

Vamos a comprobar si las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{10}{15}$ son **irreducibles**.

Primero, se halla el M.C.D. del numerador y el denominador:

$$\text{M.C.D. } (2, 3) = 1$$

$$\text{M.C.D. } (10, 15) = 5$$

Si el **M.C.D. es 1**, la fracción es **irreducible**. Por tanto, $\frac{2}{3}$ es irreducible.

Si el **M.C.D. es distinto de 1**, la fracción **no es irreducible**. Por tanto, $\frac{10}{15}$ no es irreducible.

- ▶ Una fracción es **irreducible** cuando no se puede simplificar.
- ▶ Esto ocurre cuando el numerador y el denominador son primos entre sí, es decir, su M.C.D. es 1.
- ▶ Podemos simplificar una fracción dividiendo el numerador y el denominador entre su M.C.D., y así obtenemos una fracción irreducible.
- ▶ **Recuerda** que el M.C.D. (a, b) es el producto de los factores comunes de a y de b , elevados al menor exponente.

6. Comprueba si las siguientes fracciones son irreducibles. Si no lo son, simplifícalas para obtener su fracción irreducible.

a) $\frac{10}{12}$:

b) $\frac{27}{18}$:

c) $\frac{8}{27}$:

d) $\frac{65}{13}$:

e) $\frac{17}{15}$:

f) $\frac{50}{18}$:

g) $\frac{11}{8}$:

h) $\frac{13}{39}$:

i) $\frac{71}{11}$:

2. Reducción de fracciones a común denominador. Ordenación

Vamos a hallar dos fracciones equivalentes a $\frac{2}{9}$ y $\frac{5}{6}$ que tengan el mismo denominador, es decir, vamos a **reducirlas a común denominador**.

- ▶ Primero calculamos el m.c.m. de los denominadores: $\text{m.c.m.}(9, 6) = 18$
- ▶ Después, hallamos las fracciones equivalentes a las originales que tengan por denominador su m.c.m., es decir, 18.
 - En la primera fracción, el nuevo denominador es 18. Dividimos ese número entre el denominador inicial para saber por cuánto debemos multiplicar, es decir, $18 : 9 = 2$. También debemos multiplicar el numerador por el mismo número, es decir, $2 \cdot 2 = 4$.

$$\text{Así obtenemos la fracción: } \frac{2}{9} = \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{4}{18}$$

- En la segunda fracción, el nuevo denominador es 18. Dividimos $18 : 6 = 3$, por lo que debemos multiplicar también el numerador por 3, esto es, $5 \cdot 3 = 15$.

$$\text{Obtenemos la fracción: } \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{15}{18}$$

7. Reduce a común denominador las fracciones que se indican:

a) $\frac{6}{7}$ y $\frac{8}{5}$:

c) $\frac{6}{35}$ y $\frac{3}{14}$:

b) $\frac{5}{6}$, $\frac{17}{18}$ y $\frac{7}{12}$:

d) $\frac{11}{9}$, $\frac{3}{10}$ y $\frac{16}{15}$:

Observa cómo se **comparan** las fracciones $\frac{7}{5}$ y $\frac{5}{3}$:

- ▶ Primero calculamos el m.c.m. de los denominadores: $\text{m.c.m.}(5, 3) = 15$
- ▶ Después, se convierten las fracciones originales en otras equivalentes con el mismo denominador:

$$\frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{21}{15} \qquad \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{25}{15}$$

- ▶ Por último, se comparan las fracciones equivalentes observando sus numeradores. Como el numerador de la segunda es mayor que el de la primera:

$$25 > 21 \Rightarrow \frac{25}{15} > \frac{21}{15} \Rightarrow \frac{5}{3} > \frac{7}{5}$$

8. Ordena de menor a mayor las fracciones:

a) $\frac{6}{7}$ y $\frac{6}{5}$:

c) $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ y $\frac{7}{6}$:

b) $\frac{11}{10}$ y $\frac{13}{12}$:

d) $\frac{47}{90}$, $\frac{13}{20}$ y $\frac{23}{45}$:

3. Operaciones con fracciones

Suma y resta de fracciones

Vamos a hacer la siguiente operación: $\frac{2}{3} - \frac{5}{6} + \frac{1}{4}$

▶ Primero calculamos el m.c.m. de los denominadores: m.c.m. (3, 6, 4) = 12

▶ Después, se reducen las fracciones a común denominador: $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$; $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ y $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$

▶ Por último, se suman o restan los numeradores y se deja el denominador común:

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{6} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{10}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8 - 10 + 3}{12} = \frac{1}{12}$$

▶ Es conveniente simplificar siempre que se pueda.

9. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$

b) $\frac{2}{3} - \frac{5}{6} =$

c) $\frac{5}{8} - \frac{11}{10} =$

d) $\frac{7}{2} - \frac{14}{7} =$

10. Calcula el resultado de estas operaciones:

a) $\frac{3}{4} + 2 =$

b) $\frac{2}{3} - 1 + \frac{5}{4} =$

c) $\frac{2}{9} + \frac{7}{9} - 3 =$

d) $85 - \frac{2}{8} + 10 =$

Un número entero puede escribirse en forma de fracción poniendo como denominador 1.

Por ejemplo, $5 = \frac{5}{1}$

11. Efectúa las siguientes sumas y restas:

$$a) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$$

$$b) \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} =$$

$$c) \frac{2}{9} - \frac{5}{4} - \frac{11}{6} =$$

$$d) \frac{8}{5} + \frac{13}{10} - \frac{9}{4} =$$

$$e) \frac{7}{15} + \frac{9}{10} + \frac{11}{4} =$$

$$f) \frac{16}{9} + \frac{7}{12} - 5 =$$

$$g) \frac{13}{4} + \frac{9}{10} + \frac{10}{9} =$$

$$h) \frac{8}{12} - \frac{15}{8} + \frac{19}{6} =$$

$$i) \frac{18}{27} - \frac{7}{6} - \frac{16}{12} =$$

$$j) \frac{15}{25} + \frac{75}{9} - \frac{32}{15} =$$

Recuerda que conviene, si puedes, simplificar las fracciones con las que operas.

Producto de fracciones

Vamos a hacer la siguiente operación: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$

Para **multiplicar fracciones**, se multiplican por un lado los numeradores y, por otro lado, los denominadores:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Fíjate en que también podíamos haber simplificado antes de operar:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

► La fórmula para **multiplicar fracciones** es:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

► **Recuerda** que conviene simplificar las fracciones siempre que sea posible.

12. Realiza los siguientes productos:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} =$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} =$

c) $6 \cdot \frac{5}{9} =$

d) $\frac{8}{3} \cdot 6 \cdot \frac{9}{16} =$

e) $\frac{4}{5} \cdot 10 =$

f) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{10} =$

g) $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{12} =$

Cociente de fracciones

Vamos a hacer la siguiente operación: $\frac{8}{3} : \frac{2}{9}$

Para **dividir fracciones**, se multiplican los términos de ambas **en cruz**.

Así, el numerador del resultado será el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda: $8 \cdot 9 = 72$, y el denominador del resultado será el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda: $3 \cdot 2 = 6$

El resultado será, por tanto:

$$\frac{8}{3} : \frac{2}{9} = \frac{8 \cdot 9}{3 \cdot 2} = \frac{72}{6} = 12$$

► La fórmula para dividir fracciones es:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

► Una división de fracciones también se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{\frac{b}{\frac{c}{d}}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

► Para **dividir fracciones** basta con recordar el truco: **producto de extremos entre producto de medios**.

► **Recuerda** que conviene simplificar las fracciones siempre que se pueda.

13. Reliza las siguientes divisiones de fracciones:

a) $\frac{7}{5} : \frac{14}{15} =$

b) $\frac{6}{11} : \frac{3}{7} =$

c) $\frac{7}{2} : \frac{8}{3} =$

d) $\frac{9}{10} : \frac{81}{22} =$

e) $\frac{11}{3} : \frac{9}{5} =$

Cociente de un número entre una fracción

Vamos a **dividir** el número 2 entre $\frac{8}{3}$. Para ello, escribimos el número 2 en forma de fracción, como $\frac{2}{1}$ y luego dividimos ambas fracciones multiplicando en cruz:

$$\frac{2}{8} = 2 : \frac{8}{3} = \frac{2}{1} : \frac{8}{3} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

► Fíjate en la posición del primer signo igual: nos indica que el 2 es el que está dividido entre $\frac{8}{3}$.

14. Realiza las siguientes divisiones:

a) $16 : \frac{8}{5} =$

d) $23 : \frac{5}{17} =$

b) $22 : \frac{5}{6} =$

e) $100 : \frac{33}{8} =$

c) $9 : \frac{27}{5} =$

f) $81 : \frac{9}{10} =$

Cociente de una fracción entre un número

Vamos a **dividir** el número $\frac{8}{3}$ entre 2. Para ello, escribimos el número 2 en forma de fracción, como $\frac{2}{1}$ y luego dividimos ambas fracciones multiplicando en cruz:

$$\frac{8}{3} = \frac{8}{3} : 2 = \frac{8}{3} : \frac{2}{1} = \frac{8 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

► Fíjate en la posición del primer signo igual: nos indica que el $\frac{8}{3}$ es el que está dividido entre 2.

15. Realiza las siguientes divisiones:

a) $\frac{7}{5} : 14 =$

c) $\frac{6}{11} : 22 =$

b) $\frac{9}{10} : 81 =$

d) $\frac{5}{17} : 23 =$

4. Operaciones combinadas

Observa cómo calcular la siguiente expresión: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{5}{6} : \frac{1}{5} - \frac{3}{2} \right) + \frac{25}{9}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{5}{6} : \frac{1}{5} - \frac{3}{2} \right) + \frac{25}{9} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 1} - \frac{3}{2} \right) + \frac{25}{9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{25}{6} - \frac{3}{2} \right) + \frac{25}{9} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{25}{6} - \frac{9}{6} \right) + \frac{25}{9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{16}{6} + \frac{25}{9} = \frac{2}{6} - \frac{16}{6} + \frac{25}{9} = \frac{6}{18} - \frac{48}{18} + \frac{50}{18} = \\ &= \frac{6 - 48 + 50}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

- ▶ Primero, se realizan las operaciones que haya dentro de los **paréntesis**: $\left(\frac{5}{6} : \frac{1}{5} - \frac{3}{2} \right)$
- ▶ Después, se calculan las **multiplicaciones** y las **divisiones**: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$
- ▶ Finalmente, se resuelven las **sumas** y las **restas**: $\frac{2}{6} - \frac{16}{6} + \frac{25}{9}$
- ▶ **Recuerda** que conviene simplificar las fracciones siempre que se pueda.

16. Obtén el resultado de estas operaciones:

a) $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \right) : \frac{9}{25} =$

b) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5} : \frac{9}{25} \right) =$

c) $\left(\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{7} \right) : \frac{8}{5} =$

17. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$

b) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) =$

c) $\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \cdot 4 =$

d) $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{25}{2} - \frac{3}{5} =$

e) $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{25}{2} - \frac{3}{5} \right) =$

f) $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{25}{2} - \frac{3}{5} =$

18. Opera:

$$a) \frac{2}{3} : \frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$$

$$b) \frac{2}{3} : \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) =$$

$$c) \frac{5}{4} - \frac{\frac{3}{2}}{4} =$$

$$d) \frac{2}{3} + \frac{3}{5} : \frac{25}{2} - \frac{3}{5} =$$

$$e) \frac{2}{3} + \frac{3}{5} : \left(\frac{25}{2} - \frac{3}{5} \right) =$$

$$f) \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \right) : \frac{25}{2} - \frac{3}{5} =$$

19. Halla el resultado de las operaciones que se indican a continuación:

$$a) \frac{2}{3} - \frac{9}{25} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) =$$

$$b) \frac{2}{3} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} + \frac{7}{2} =$$

$$c) \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{3}{8}} =$$

$$d) \frac{5}{4} + 4 \cdot \frac{5}{16} : \frac{10}{2} =$$

$$e) \frac{5 - \frac{1}{2}}{\frac{9}{4}} =$$

$$f) \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}} =$$

$$g) \frac{\frac{5}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{8}}{\left(\frac{5}{4} - \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{6}{8}} =$$

5. Problemas

Tres amigos, Ramón, Yolanda y Jesús, se reparten 40 libros. Ramón recibe la cuarta parte del total de los libros; Yolanda, la octava parte, y Jesús, la mitad. ¿Cuántos libros consigue cada uno? ¿Queda algún ejemplar sin repartir?

Primero se calcula lo que recibe cada amigo:

- Ramón: $\frac{1}{4} \cdot 40 = 10$ libros
- Yolanda: $\frac{1}{8} \cdot 40 = 5$ libros
- Jesús: $\frac{1}{2} \cdot 40 = 20$ libros

En el reparto, quedan 5 libros sin repartir, ya que: $40 - (10 + 5 + 20) = 5$ libros

- ▶ Calculamos la cuarta parte de 40 multiplicando 40 por 1 y dividiendo entre 4.
- ▶ Calculamos la octava parte de 40 multiplicando 40 por 1 y dividiendo entre 8.
- ▶ Calculamos la mitad de 40 multiplicando 40 por 1 y dividiendo entre 2.
- ▶ Sumamos los libros que recibe Ramón más los que le tocan a Yolanda más los de Jesús. A 40 le restamos esta suma y así obtenemos los libros que quedan sin repartir.

- 20.** Un autobús de línea parte de su destino con 60 pasajeros. En la primera parada que hace se bajan $\frac{2}{3}$ de los pasajeros; en la segunda, $\frac{7}{10}$ de los que quedaban, y en la tercera, 2 personas. ¿Cuántos viajeros se han bajado en cada parada? Si la cuarta parada coincide con el final del trayecto, ¿cuántas personas se apean en esta última parada?

- 21.** Un agricultor tiene la cuarta parte de una finca de 50 000 m² dedicada al cultivo de cebada, en $\frac{2}{5}$ del terreno ha plantado trigo, y el resto lo tiene en barbecho. Calcula cuántos metros cuadrados dedica el agricultor a cada cultivo.

- 22.** En una fábrica tienen que envasar en una tarde 300 L de refresco en botellas de $\frac{3}{4}$ L. Si embotellan 350 botellas cada tarde, ¿podrán terminar este trabajo?
- 23.** A una carrera popular se presentaron 90 personas. Los tres primeros recibieron una medalla y los quince siguientes una camiseta. ¿Qué fracción de participantes recibió algún premio? ¿Qué fracción no recibió premio?
- 24.** Los hogares españoles destinan los tres décimos de sus ingresos a pagos relacionados con la vivienda, $\frac{3}{20}$ a la alimentación y $\frac{3}{25}$ al transporte. El resto se destina a otros usos. ¿Qué fracción de los ingresos se destina a otros usos? Si el gasto medio por hogar fue de 30 000 €, ¿cuánto dinero se destinó a alimentación?
- 25.** En las elecciones locales celebradas en un pueblo, $\frac{9}{25}$ de los votos fueron para el partido A, $\frac{3}{5}$ para el partido B, y el resto fueron votos en blanco y nulos.
- a)** ¿Qué fracción de votos en blanco y votos nulos hubo?
- b)** Si en total votaron 500 personas, ¿cuántos votos obtuvo cada partido? ¿Qué partido ganó las elecciones?
- c)** Calcula el número de abstenciones sabiendo que el número de votos representa los $\frac{10}{11}$ del censo electoral.

Evaluación

1. Escribe una simplificación y una amplificación de cada una de las fracciones siguientes:

a) $\frac{15}{24} =$

b) $\frac{10}{270} =$

c) $\frac{92}{26} =$

2. Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones: $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{5}{12}$ y $\frac{11}{30}$

3. Realiza las siguientes operaciones con fracciones:

a) $\frac{3}{7} + \frac{5}{9} - \frac{2}{21} =$

b) $\frac{4}{5} : 2 - \frac{1}{4} =$

c) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} =$

4. Resuelve la siguiente operación combinada:

$$\left(\frac{2}{5} : \frac{3}{7} - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{20}{9} + \frac{1}{6} =$$

5. Darío tiene reservados 120 € para comprar regalos a su familia. Se gasta $\frac{3}{8}$ de su presupuesto en un reproductor de música para su hermano. Después, va a una librería y gasta $\frac{2}{5}$ de lo que le queda en unos libros para su padre. Finalmente, le compra a su madre una impresora por 40 €. ¿Cuánto dinero ha gastado en total? ¿Le ha sobrado algo?