BLOQUE FUNCIONES

UNIDAD 1

Límites. Aplicaciones

Enfoques

Estos son los nueve límites planetarios y el estado en que se encuentran

Hasta 1926, el parque de Yellowstone había sido un lugar relativamente estable. A pesar de la dureza de sus inviernos y la constante actividad volcánica, los ciclos ecológicos se desarrollaban con normalidad. Hasta 1926. Aquel año, un grupo de cazadores **acabó con la última manada de lobos grises que dominaba el primer parque natural de EE UU. Aquel hecho se entendió entonces como un éxito de la política de control de predadores y alimañas del país. Pero las consecuencias no se vieron venir. [...]**

Así, en un efecto cascada que hasta entonces era desconocido, el ecosistema de Yellowstone sufrió un cambio radical. La degradación del entorno intentó frenarse de varias maneras, pero al final **la única solución fue reintroducir los lobos.** Al eliminar al depredador, el ser humano había superado un límite invisible que nadie había percibido. La desaparición del lobo marcó un punto de inflexión. Su reintroducción en 1990, también. En menos de dos décadas, el parque volvió a ser lo que era.

Como en Yellowstone, el planeta tiene sus límites. La flexibilidad y la adaptabilidad de la vida es increíble, pero el conjunto de interacciones complejas que forman los ecosistemas y, en última instancia, el sistema de la Tierra, **no pueden presionarse hasta el infinito sin esperar consecuencias. Sin sufrir efectos en cascada que acaben con la relativa estabilidad de la que hemos disfrutado los seres humanos hasta ahora.**

Partiendo de esta idea, el Centro de Resiliencia de Estocolmo desarrolló en 2009 **el concepto de límites planetarios.** Identificó nueve procesos clave **para la estabilidad de la Tierra y los umbrales que no deberían sobrepasarse para mantenerla. Desde entonces, se ha trabajado para entenderlos mejor y cuantificarlos. Las noticias no son demasiado buenas: cinco de los nueve límites ya han sido superados.**

FUENTE: bbva.com (23 de febrero de 2022)

1. ¿Qué ocurrió en Yellowstone en 1926? ¿Qué consecuencias tuvo?
2. Explicad qué significa el concepto de límites planetarios y buscad información sobre los que ya se han superado. Debatid sobre cómo se podría haber evitado.
3. Analizad qué similitudes y diferencias tiene este concepto con el de límite que estudiáis en Matemáticas.

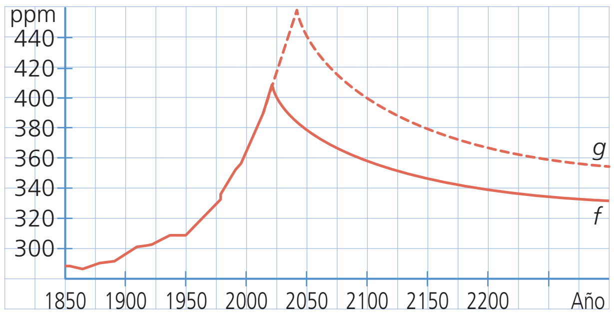
1 Concepto de límite

1.1. Límites en el infinito

Rita está leyendo una noticia sobre el cambio climático en la que se presenta una gráfica que muestra cuánto tiempo permanecería el CO_2 en la atmósfera si hubiéramos dejado de quemar combustibles fósiles en 2021 o si lo hiciéramos 20 años después.

Mirando la gráfica se pregunta si el CO_2 desaparecería en algún momento o si habría una cantidad que no desaparecería nunca.

Para averiguarlo, analiza el comportamiento de ambas funciones a lo largo del tiempo.



En el caso de haber dejado de utilizar combustibles fósiles en 2021 parece que el CO_2 tenderá a 320 ppm, mientras que si observamos la gráfica de la función discontinua puede parecer que se estabilizará alrededor de 340 ppm.

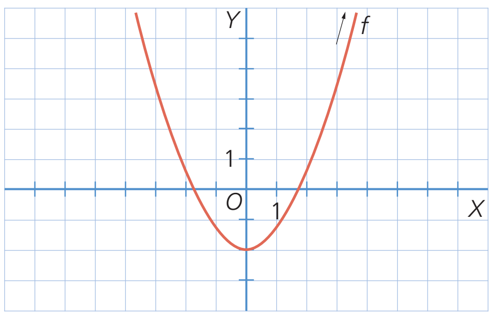
En ambos casos Rita ha analizado el límite de cada función cuando x tiende a $+\infty$, y escribe que:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 320$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 340$

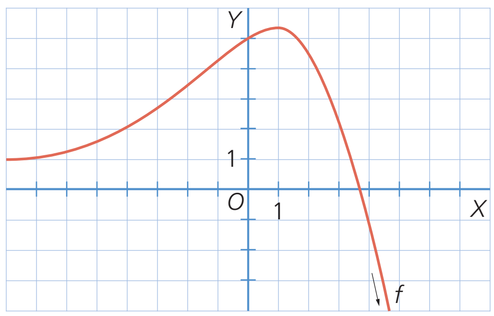
El **límite de una función cuando x tiende a $+\infty$,** es el valor que toma dicha función al estudiar su comportamiento para valores cada vez mayores.

Se escribe: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

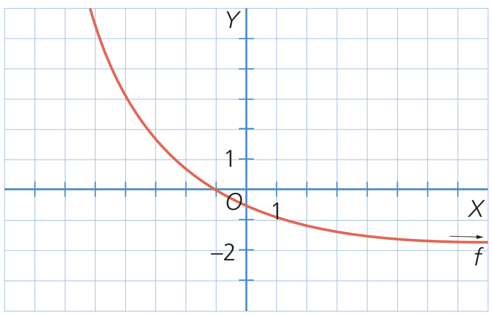
El resultado de este límite puede ser $+\infty$, $-\infty$, un número o no existir. Por ejemplo:



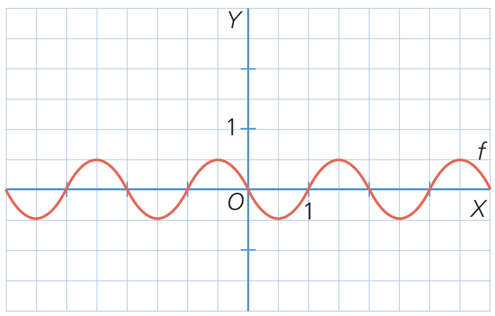
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$



No existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

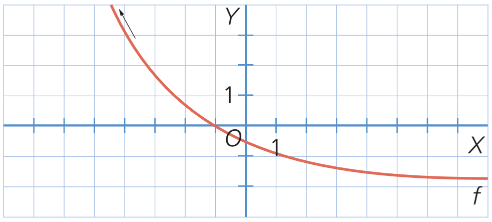
Análogamente, el **límite de una función cuando x tiende a $-\infty$,** es el valor que toma dicha función al estudiar su comportamiento para valores cada vez menores.

Se escribe: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

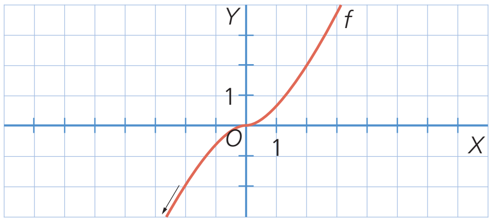
Presta atención

El límite de una función en el infinito no tiene por qué coincidir en $+\infty$ y en $-\infty$.

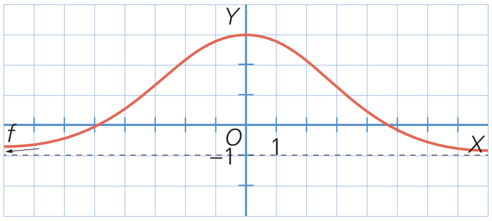
El resultado de este límite puede ser $+\infty$, $-\infty$, un número o no existir. Por ejemplo:



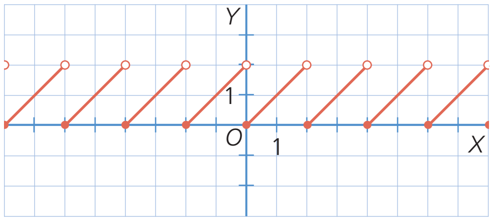
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$



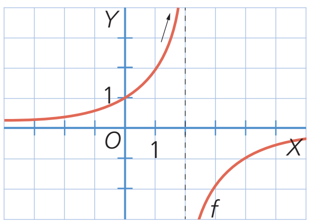
No existe $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

1.2. Límites en un punto

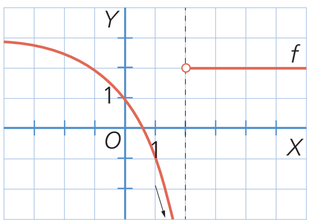
Aunque una función no esté definida en un punto, podemos estudiar su comportamiento para valores próximos a él. Definimos así los **límites laterales.**

- El **límite de una función cuando *x* tiende a un punto *a* por la izquierda,** es el valor que toma dicha función para valores próximos al punto, pero menores que él.
  Se escribe: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$
- El **límite de una función cuando *x* tiende a un punto *a* por la derecha**, es el valor que toma dicha función para valores próximos al punto, pero mayores que él.
  Se escribe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

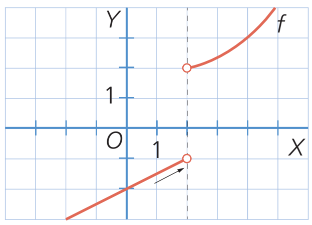
En ambos casos, su resultado puede ser $+\infty$, $-\infty$ o un número. Por ejemplo:



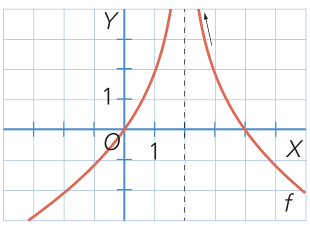
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$



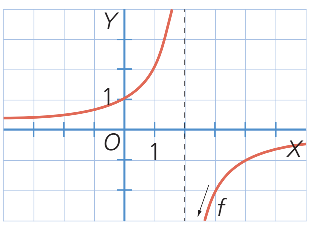
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$



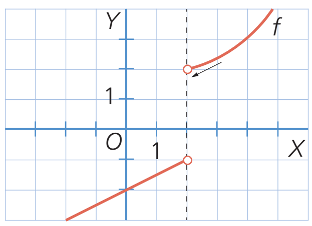
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -1$



$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

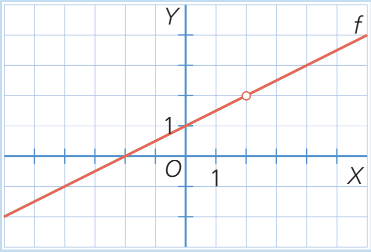


$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$



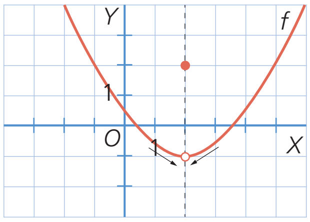
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2$

Presta atención

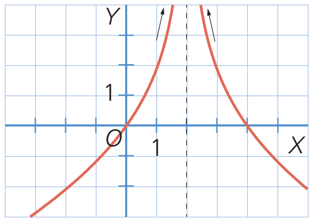


Puede existir el límite en un punto sin tener que estar definida la función en ese punto o que lo esté, pero tome un valor distinto al que tiende la función en él.

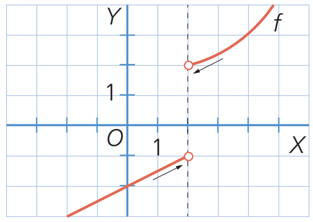
Para que exista el **límite en un punto,** los límites laterales tienen que ser iguales y finitos.



$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$



No existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.



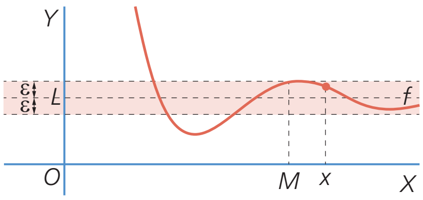
No existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

El **límite de la función cuando x tiende a un punto $x = a$**, es el valor que toma dicha función para valores próximos al punto, tanto mayores como menores que él. Se escribe: $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

1.3. Definición de límite

Como hemos visto, el límite de una función cuando x tiende a $+\infty$ (o $-\infty$), es el valor que toma dicha función al estudiar su comportamiento para valores cada vez mayores (o menores). Puede ser finito o infinito.

De este modo, definimos:



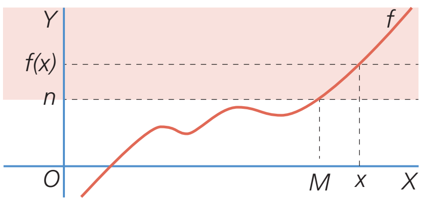
- **Límite finito de una función cuando x tiende a infinito**

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \right)$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ ($M < 0$) tal que para todo $x > M$ ($x < M$) perteneciente al dominio de f, se cumple que: $|f(x) - L| < \varepsilon$

Lenguaje matemático

Al definir el límite de una función, podemos utilizar estos símbolos y expresiones:

- $\forall$, se lee *para todo.*
- $\exists$, se lee *existe.*
- $|$, se lee *tal que.*
- $|x - a| = d(x, a)$

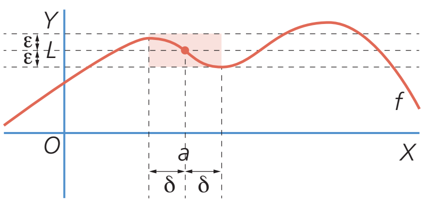


- **Límite infinito de una función cuando x tiende a infinito**

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \right)$ si para todo número $n \in \mathbb{R}$, podemos encontrar $M > 0$ tal que si $x > M$ se cumple que: $f(x) > n$ ($f(x) < n$)

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \right)$ si para todo número $n \in \mathbb{R}$, podemos encontrar $M < 0$ tal que si $x < M$ se cumple que: $f(x) > n$ ($f(x) < n$)

Para encontrar el límite de una función cuando x tiende a un punto tenemos que observar qué valores toma la función en un intervalo muy pequeño alrededor del punto, es decir, para valores muy próximos a x cuánto vale y. Puede ser:



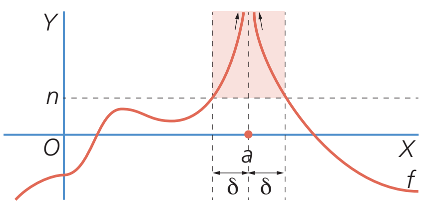
- **Límite por la derecha (o por la izquierda) en $x = a$**

  $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ $\left(\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L \right)$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x > a$ ($x < a$) del dominio de f, con $0 < |x - a| < \delta$ entonces: $|f(x) - L| < \varepsilon$

- **Límite en $x = a$**

  $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x del dominio de f, con $0 < |x - a| < \delta$ entonces: $|f(x) - L| < \varepsilon$

  Observa que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si y solo si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

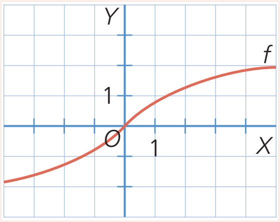


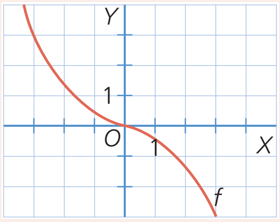
- **Límite infinito en $x = a$**

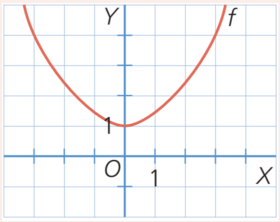
  $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty \right)$ si para todo $n \in \mathbb{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x perteneciente al dominio de f, con $0 < |x - a| < \delta$ entonces: $f(x) > n$ ($f(x) < n$)

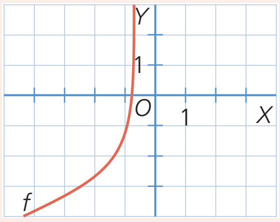
Actividades

1 Relaciona las siguientes gráficas con los posibles valores de los límites indicados.

a) 

c) 

b) 

d) 

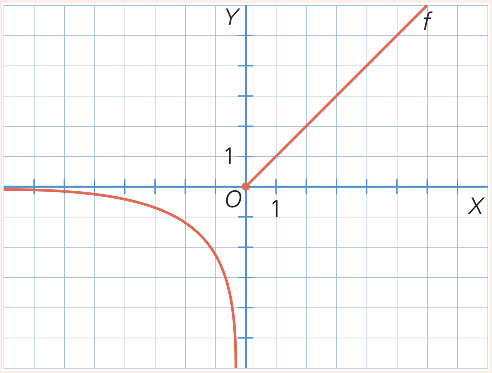
I) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

II) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

III) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

IV) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$

2 Indica el límite de la función en cada caso.



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

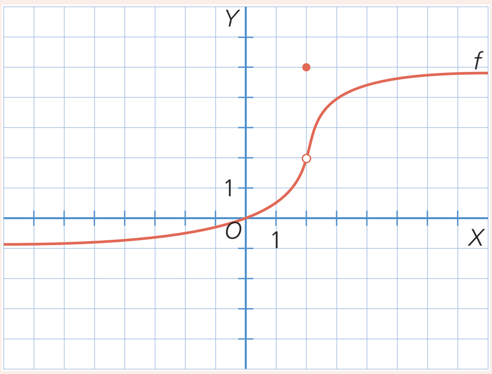
c) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

f) $f(0)$

3 Indica el límite de la función en los siguientes casos.



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

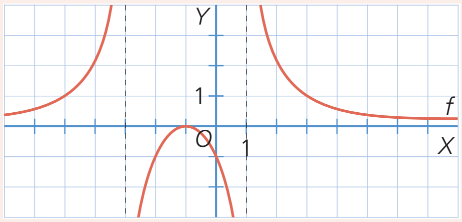
c) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$

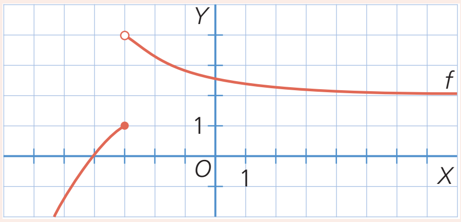
d) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

f) $f(2)$

4 Escribe las expresiones de los límites de las siguientes funciones.

a) 

b) 

5 Representa una función que cumpla que:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$
- $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $f(0) = 1$

6 Representa una función que cumpla que:

- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$
- no existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Ejercicio resuelto

7 Aplica la definición de límite para demostrar que: $\lim\limits_{x\to1} (2x+1) = 3$

Solución

Tenemos que demostrar que, para cualquier $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$, de forma que cualquier valor x con $0 < |x-1| < \delta$, cumple que: $|f(x) - L| < \varepsilon$

Si $\varepsilon > 0$, y tomamos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, se cumple que:

Cualquier valor x tal que $|x-1| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ verifica que:

$$|f(x) - L| = |2x + 1 - 3| = |2x - 2| =$$

$$= 2 \cdot |x-1| < 2 \cdot \delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

8 Aplica la definición de límite para demostrar que: $\lim\limits_{x\to-1} (3x+5) = 2$

Desafío matemático

9 Aplica la definición para demostrar que: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x-5} = 0$

2 Operaciones con límites. Cálculo de límites

2.1. Operaciones con límites

El lince ibérico está en grave riesgo de extinción aunque, gracias a unas buenas medidas de ayuda que incluyen el aumento de zonas para que habiten y centros de cría, se está consiguiendo aumentar su población. Se ha modelizado su cría en dos de estos centros mediante las funciones $f(t) = \frac{2t^2 - 3t + 3}{t^2 + 1} \cdot 30$ y $g(t) = 12 - \frac{\sqrt{t^2 - 2t + 9}}{t + 1}$ y quieren saber a qué tenderá dicha cría de ambos. Al hallar cada límite comprobamos que en el primer centro tiende a 60 y en el segundo, a 11, luego: $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\frac{2t^2 - 3t + 3}{t^2 + 1} \cdot 30 + 12 - \frac{\sqrt{t^2 - 2t + 9}}{t + 1} \right) =$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{2t^2 - 3t + 3}{t^2 + 1} \cdot 30 \right) + \lim_{t \to +\infty} \left(12 - \frac{\sqrt{t^2 - 2t + 9}}{t + 1} \right) = 60 + 11 = 77$$

Como ocurre con los números reales, podemos realizar operaciones con límites, siendo t un número real o $\pm\infty$. De este modo, tenemos que:

- $\lim\limits_{x \to t} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to t} f(x) \pm \lim\limits_{x \to t} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to t} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to t} f(x)}{\lim\limits_{x \to t} g(x)}$
- $\lim\limits_{x \to t} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to t} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to t} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to t} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x \to t} f(x) \right)^{\lim\limits_{x \to t} g(x)}$

2.2. Cálculo de límites

Para resolver un límite analíticamente, primero calculamos el valor de la expresión cuando x tiende al valor indicado, teniendo en cuenta que si tiende a $-\infty$, se puede resolver directamente o sustituyendo las x por $-x$ y calculando el límite cuando x tiende a $+\infty$. Al resolverlos se obtienen diferentes resultados. En esta tabla se muestran los más frecuentes.

Suma o resta	$\infty + k = \infty - k = \infty$
	$+\infty + \infty = +\infty$; $-\infty - \infty = -\infty$
Multiplicación	$\infty \cdot k = \infty \ (k \neq 0)$
	$\infty \cdot \infty = \infty$
División	$\frac{\infty}{k} = \infty \ (k \neq 0)$
	$\frac{k}{\infty} = 0, \frac{k}{0} = \infty \ (k \neq 0)$

Potencia	Si $k > 0$: $\infty^k = \infty$
	$\infty^{-k} = \frac{1}{\infty^k} = \frac{1}{\infty} = 0$
	Si $k > 1$: $k^{+\infty} = \infty$
	Si $0 < k < 1$: $k^{+\infty} = 0$
	$(+\infty)^{+\infty} = \infty$
	$(+\infty)^{-\infty} = \frac{1}{(+\infty)^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Al realizar algunas operaciones con límites no obtenemos un valor determinado. En estos casos, las expresiones que resultan se llaman **indeterminaciones.** Podemos obtener las siguientes:

$\frac{\infty}{\infty}$ $\qquad \infty - \infty$ $\qquad 1^{\infty}$ $\qquad \frac{0}{0}$ $\qquad 0^0$ $\qquad 0 \cdot \infty$ $\qquad \infty^0$

Indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Si queremos calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+2}{3x^2+5}$, y utilizamos las operaciones anteriores resulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+2}{3x^2+5} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+x+2\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2+5\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$, que es una indeterminación.

Para resolverla, dividimos el numerador y el denominador por la mayor potencia de x que aparezca en el cociente, en este caso x^2, simplificamos y calculamos el límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+2}{3x^2+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x^2}} = \frac{1+0+0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

Dependiendo del grado de las funciones polinómicas que forman el cociente, podemos obtener diferentes resultados. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+x+2}{3x^2+5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{x}{x^4}+\frac{2}{x^4}}{\frac{3x^2}{x^4}+\frac{5}{x^4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}}{\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^4}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+2}{3x^3+5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{5}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{3+\frac{5}{x^3}} = \frac{0}{3} = 0$$

Indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$

- Al calcular $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3}{x-2} - \frac{2x^2-5x}{x+1}\right)$, obtenemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3}{x-2} - \frac{2x^2-5x}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{x-2} - \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x}{x+1} = [\infty-\infty]$$, que es una indeterminación. Para resolverla, operamos y resulta la indeterminación anterior:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3}{x-2} - \frac{2x^2-5x}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-3\right)(x+1)-\left(2x^2-5x\right)(x-2)}{(x-2)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+x^2-3x-3\right)-\left(2x^3-4x^2-5x^2+10x\right)}{x^2-x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+10x^2-13x-3}{x^2+x-2} =$$

$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -\infty$, ya que el grado del numerador es mayor que el del denominador y uno de los coeficientes de mayor grado es negativo.

- Al calcular $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x-6}-\sqrt{2x-3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-6} - \lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-3} = [\infty-\infty]$, que es una indeterminación. Para resolverla, multiplicamos y dividimos por el conjugado y obtenemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x-6}-\sqrt{2x-3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x-6}-\sqrt{2x-3}\right)\left(\sqrt{2x-6}+\sqrt{2x-3}\right)}{\sqrt{2x-6}+\sqrt{2x-3}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-6)-(2x-3)}{\sqrt{2x-6}+\sqrt{2x-3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{\sqrt{2x-6}+\sqrt{2x-3}} = 0$$

Presta atención

- El límite de un polinomio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ es el límite del término de mayor grado:
  $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_nx^n = a_n \cdot \lim_{x\to+\infty} x^n$
- Al calcular $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, su resultado depende del grado de $f(x)$ y $g(x)$:
  - grado $f(x)$ > grado $g(x)$, el límite es $+\infty$ o $-\infty$ dependiendo del signo de los coeficientes de mayor grado.
  - grado $f(x)$ = grado $g(x)$, el límite es el cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado.
  - grado $f(x)$ < grado $g(x)$, el límite es 0.

Presta atención

Al calcular $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$, su resultado depende del grado de $f(x)$ y $g(x)$:

- grado $f(x)$ > grado $g(x)$, el límite es $+\infty$.
- grado $f(x)$ < grado $g(x)$, el límite es $-\infty$.
- grado $f(x)$ = grado $g(x)$, tenemos que operar para obtener el límite.

Recuerda

El conjugado de $a + b$ es $a - b$, y el de $a - b$ es $a + b$. Al multiplicar las dos expresiones obtenemos: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Indeterminaciones tipo 1^{∞}

Al calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-5}\right)^{3x-2}$, obtenemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-5}\right)^{3x-2}=\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-5}\right)\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)}=\left(\frac{1}{1}\right)^{\infty}=\left[1^{\infty}\right],$$

que es una indeterminación.

Para resolverla, vamos a demostrar que se cumple que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\cdot(f(x)-1)}$$

Para ello, sabemos que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$, siempre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, tal y como comprobamos el curso pasado, y utilizaremos la técnica que se empleó en la resolución de indeterminaciones de este tipo.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}(1+f(x)-1)^{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}\right)^{g(x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot(f(x)-1)\cdot g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{(f(x)-1)\cdot g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)}$$

> **Presta atención**
>
> La indeterminación 1^{∞} también puede presentarse al calcular el límite cuando x tiende a $-\infty$ o también a cualquier número a.

22mt0b201

Así, para resolver el límite propuesto podemos aplicar esta fórmula y resulta:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-5}\right)^{3x-2}=\left[1^{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x+1}{x-5}-1\right)(3x-2)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x+1-x+5}{x-5}\right)(3x-2)\right]}=$$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6}{x-5}\right)(3x-2)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{18x-12}{x-5}\right)}=e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}=e^{18}$, ya que el grado del numerador y el grado del denominador del exponente son iguales.

Indeterminaciones del tipo $\dfrac{0}{0}$

Para calcular $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-8x-10}$, primero sustituimos x por -1, y resulta:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{2x^2-8x-10}=\frac{1-1}{2+8-10}=\left[\frac{0}{0}\right],$$ que es una indeterminación.

Para resolverla:

1. Factorizamos los polinomios, teniendo en cuenta que $x=-1$ es raíz de ambos, y obtenemos:

   $x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$

   $2x^2-8x-10=2(x-5)\cdot(x+1)$

2. Escribimos los polinomios factorizados y simplificamos para hallar el valor del límite.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{2x^2-8x-10}=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}\cdot(x-1)}{2\cancel{(x+1)}\cdot(x-5)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{2(x-5)}=\frac{-2}{-12}=\frac{1}{6}$$

Actividades

10 Sabiendo que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 3$, calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g(x))$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{f(x)} - h(x)\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (h(x))^{g(x)}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)\cdot g(x) + h(x))$

S: a) $+\infty$ b) -3 c) 0 d) $-\infty$

11 Determina el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x^3 + 5x\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-x^3 - x^2 + 10\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2+4}\right)^3$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{5}{\sqrt{2x^4}}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to-1} \left(\dfrac{1}{\log x^2} - 10\right)$

f) $\lim\limits_{x\to4} \left(\dfrac{x-4}{2\sqrt{x}} - \ln e^x\right)$

S: a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) 0 d) $-\infty$ e) ∞ f) -4

12 Indica qué indeterminaciones aparecen al resolver estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to1} \left(x^3\right)^{\frac{1}{x-1}}$

b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3-3}{x^2+1} - \ln x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2}{x+5}\cdot \log x^2\right)$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[7]{x^3}}{x^3+2}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\log x}$

13 Calcula los siguientes límites en $+\infty$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-3x+1}{4x^2+5x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-x}{3x^2+x+7}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x^2-2}{3x^4+1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^3+8}{7x^3+x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^3+3}}{x^2+x}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{4x^2+6}}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{3x^3+2x-1}}{4x-9}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+2}{\sqrt{4x^3-x}}$

S: a) $+\infty$ b) $2/3$ c) 0 d) $-1/7$ e) 0 f) $+\infty$ g) $\sqrt[3]{3}/4$ h) 0

14 Halla el valor de estos límites en $-\infty$.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3x+1}{4x^2+5x}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-x}{3x^2+x+7}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{4x^2+6}}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{3x^3+2x-1}}{4x-9}$

S: a) $-\infty$ b) $2/3$ c) $+\infty$ d) $\sqrt[3]{3}/4$

15 Calcula el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3-3x+1}{4x^2+5x} - \dfrac{x^2+9}{x^2-2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x-3}{-x^2+x} - \dfrac{x^4+x}{x^2+5}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3+1}{x^2-9} - \dfrac{x^3-3}{x^2-4x+3}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2-3}{1-x} - \dfrac{x^2+1}{2-x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^3+x} - \sqrt{x^3-2x+1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^4-2x} - x^2 + 1\right)$

S: a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) -4 d) 1 e) 0 f) 1

16 Determina el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2+x}{x-3}\right)^{3x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to2} \left(5-x^2\right)^{\frac{3}{x-2}}$

c) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{\frac{x-2}{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+1}{x^2+4}\right)^{\frac{2x}{x-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^4-3}}\right)^{\sqrt{x}}$

f) $\lim\limits_{x\to-1} \left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{\frac{5}{x+1}}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x^2-4x}{2x^2+7}\right)^{2(x-3)}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x-6}}\right)^{-e^x}$

S: a) $+\infty$ b) e^{-12} c) No existe. d) 0 e) 1 f) No existe. g) e^{-4} h) 0

17 Halla el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$

b) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{-x^2+5x-6}{x^2-2x}$

c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to-5} \dfrac{x^5+2x^4-18x^3-4x^2+49x-30}{x^3-x^2-22x+40}$

S: a) $1/2$ b) $1/2$ c) 1 d) $96/7$

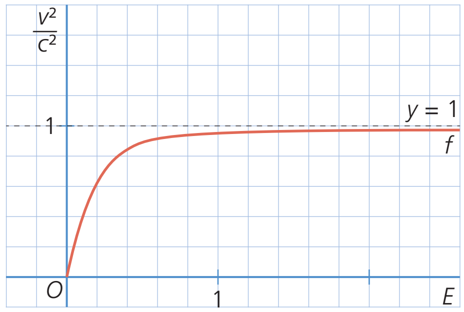
Desafío matemático

18 Demuestra que la indeterminación $1^{-\infty}$ se resuelve de la misma forma que la indeterminación $1^{+\infty}$ sin necesidad de hacer ningún cambio para resolverla.

3 Asíntotas. Dominio de la función

3.1. Asíntotas horizontales

Dennis sabe que no se puede viajar a la velocidad de la luz. Sin embargo, nunca ha entendido por qué ocurre esto, hasta que observa esta gráfica donde se representa la velocidad, al cuadrado, de un cuerpo respecto de la velocidad, también al cuadrado, de la luz, c, dependiendo de la energía necesaria para obtener dicha velocidad.



Dennis observa que al principio con poca energía aumenta rápido la velocidad y cuanta más energía se tenga más se acerca a la altura 1 u, pero que por más que aumente la velocidad no se consigue tocar la recta $y = 1$, es decir, se necesitaría una energía *infinita* para acelerar un cuerpo a la velocidad de la luz.

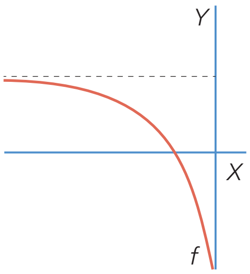
Decimos que la recta $y = 1$ es una **asíntota horizontal** de la función.

Para que la función f se acerque a una recta horizontal $y = k$ debe ocurrir que al aumentar los valores de la variable x, en valor absoluto, los valores de $f(x)$ deben acercarse cada vez más a k.

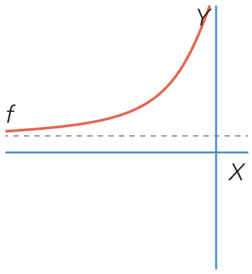
La recta $y = k$ es una **asíntota horizontal** de la función f si se cumple que:
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$, siendo k un número real.

La función f puede acercarse por encima o por debajo a una asíntota horizontal. Para averiguar su posición relativa, calculamos $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - k)$, y:

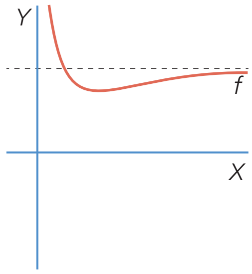
si $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - k) = 0^+ \rightarrow f$ por encima y si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - k = 0^+ \rightarrow f$ por debajo.



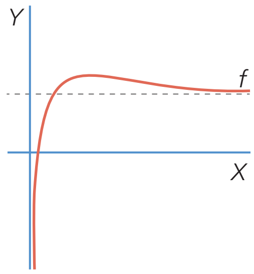
$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - k) = 0^-$



$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - k) = 0^+$



$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - k) = 0^-$



$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - k) = 0^+$

Ejercicio resuelto

19 **Halla las asíntotas horizontales de:** $f(x) = 1 - e^{x+1}$

Solución

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - e^{x+1}\right) = 1 - e^{-\infty} = 1 - \frac{1}{e^{\infty}} = 1 - 0 = 1$$

Por tanto, f tiene una asíntota horizontal $y = 1$ cuando x tiende a $-\infty$.

Además: $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - 1) = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - e^{x+1} - 1\right) = \lim_{x\to-\infty} - e^{x+1} = 0^-$ pues $-e^{x+1} < 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ por lo que la función se acerca a la asíntota por debajo.

Por otra parte: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - e^{x+1}\right) = 1 - e^{+\infty} = 1 - \infty = -\infty$

Luego, no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

3.2. Asíntotas oblicuas

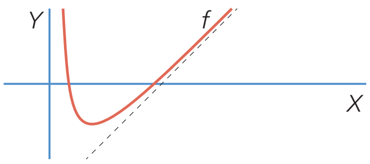
Puede ocurrir que cuando x toma valores muy grandes, en valor absoluto, una función se acerque a una recta oblicua de la forma $y = mx + n$ con $m \neq 0$. Para ello, al tomar valores cada vez más alejados de $x = 0$, positivos o negativos, la distancia de la función a la recta debe ser cada vez menor.

La recta $y = mx + n$ es una **asíntota oblicua** de la función f con $m, n \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$, si se cumple que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$

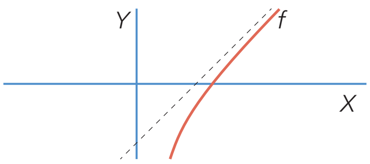
Como ocurre con las asíntotas horizontales, podemos estudiar si la función se acerca por encima o por debajo a la asíntota oblicua. Para ello, calculamos $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + n))$, y analizamos el resultado.

Lenguaje matemático

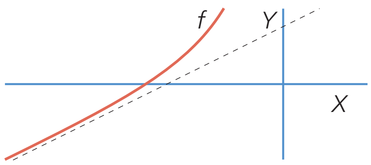
Si al calcular los límites en el infinito, el resultado es infinito, la función no se acerca a ninguna recta. En este caso, la función no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas y decimos que tiene **ramas parabólicas**.



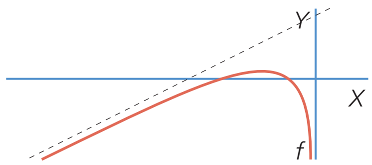
$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0^+$



$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0^-$



$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0^+$



$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0^-$

Ejercicio resuelto

20 **Calcula las asíntotas oblicuas de:** $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 8}{x - 1}$

Solución

En este caso, podemos realizar la división, y resulta: $f(x) = (2x - 3) + \dfrac{5}{x - 1}$

De este modo, obtenemos que la asíntota es $y = 2x - 3$ ya que:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (2x - 3)) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\left(2x - 3 + \frac{5}{x - 1} \right) - (2x - 3) \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x - 1} = \frac{5}{\infty} = 0$$

Recuerda

Si grado(P) > grado (Q), entonces:

$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array}$ siendo $C(x)$ el cociente y $R(x)$ el resto, se cumple que: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$

No siempre es posible obtener la asíntota de este modo. Para conocer los coeficientes m y n podemos calcular los límites indicados a continuación.

Si la recta $y = mx + n$ es una **asíntota oblicua** de la función f, se cumple que:

$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$ con $m, n \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$

Ejercicio resuelto

21 **Determina las asíntotas oblicuas de:** $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 3}$

Solución

En este caso, determinamos m y n calculando estos límites: $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4x - 3}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{x^2}} = 1$

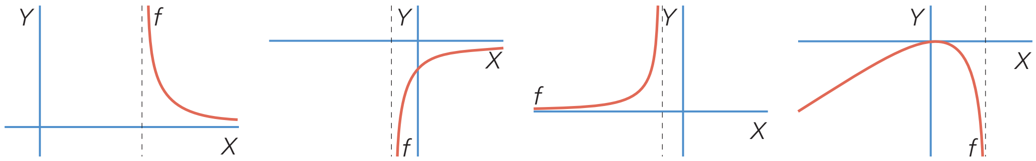
y $n = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x - 3} - 1 \cdot x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x^2} + 4x - 3 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 4x - 3} + x} = 2 \rightarrow y = x + 2$ es una asíntota oblicua.

También: $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x - 3}}{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{1 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{x^2}} = -1$ y

$n = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4x - 3}{\sqrt{x^2 - 4x - 3} + x} = -2 \rightarrow y = -x - 2$ es una asíntota oblicua.

3.3. Asíntotas verticales

Una función también puede acercarse a una recta vertical $x = k$. Para ello, debe ocurrir que al tomar valores cada vez más cercanos a $x = k$, los valores de $f(x)$ deben ser cada vez mayores, en valor absoluto.



$\lim\limits_{x \to k^+} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to k^+} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to k^-} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to k^-} f(x) = -\infty$

La recta $x = k$ es una **asíntota vertical** de la función f si se cumple que:

$\lim\limits_{x \to k^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x \to k^+} f(x) = \pm\infty$

Estas asíntotas se dan en los puntos donde la función presente discontinuidades o en los extremos del dominio y, además, podamos obtener al menos uno de los límites laterales. Por tanto, antes de determinarlas, conviene estudiar su dominio.

Dominio de una función

Sabemos que el **dominio** de una función f es el conjunto de todos los puntos en los que está definida.

Si f es una función real de variable real, su **dominio** se define como:

Dom $f = \{x \in \mathbb{R}: \exists\ y \in \mathbb{R}$ con $f(x) = y\}$

Salvo que se indique lo contrario, el dominio de una función estará formado por los puntos tales que al sustituirse en la expresión algebraica de la función no resulten operaciones imposibles. Por tanto, no pertenecen al dominio, valores que:

- anulen el denominador, si lo hubiera.
- hacen el radicando negativo, si hay una raíz de índice par.
- den lugar al logaritmo de un número negativo o nulo, si hay un logaritmo.

También hay que tener en cuenta que las funciones arcoseno y arcocoseno solo están definidas para valores entre -1 y 1.

Y si una función está definida a trozos, no pertenecen al dominio los valores que no forman parte de ninguna de sus ramas.

Lenguaje matemático

Podemos utilizar también el símbolo : para indicar *tal que*.

Así $x \in \mathbb{R}$:... se lee x *pertenece a* $\mathbb{R}$ *tal que...*

Presta atención

Antes de determinar cualquier asíntota, conviene estudiar el dominio de la función.

Ejercicio resuelto

22 **Halla las asíntotas verticales de:** $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 5x - 2}$

Solución

1. Determinamos el dominio de f. Para ello, resolvemos la ecuación: $3x^2 + 5x - 2 = 0$

$$\to x = -2,\ x = \frac{1}{3} \to \text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{-2, \frac{1}{3}\right\}$$

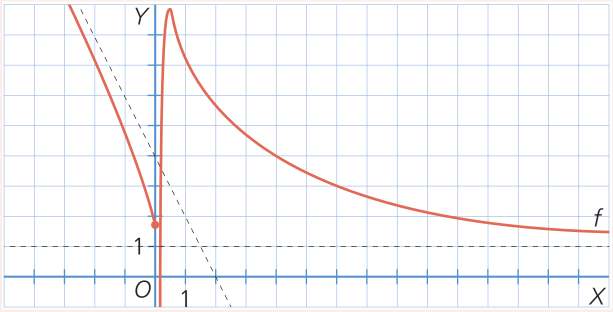
2. Calculamos el límite cuando x tiende a los puntos en los que no está definida la función.

- $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 5x - 2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\cancel{(x+2)}(2x-1)}{(3x-1)\cancel{(x+2)}} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x-1}{3x-1} = \dfrac{-5}{-7} = \dfrac{5}{7} \to x = -2$ no es asíntota vertical.
- $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 5x - 2} = \dfrac{-7/9}{0} = \pm\infty \to x = \dfrac{1}{3}$ es asíntota vertical.

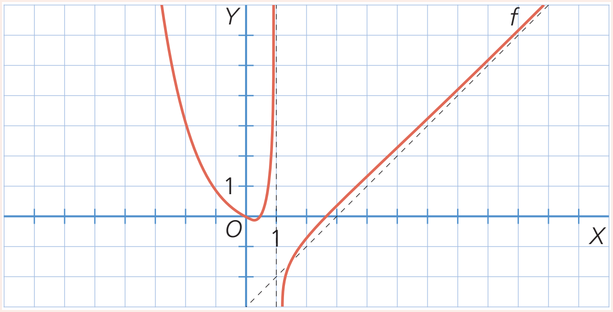
Actividades

23 Determina las asíntotas de las siguientes funciones.

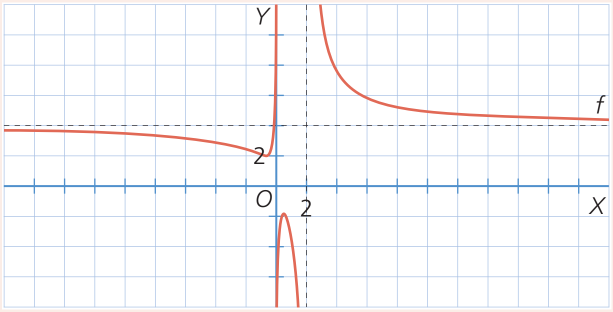
a)



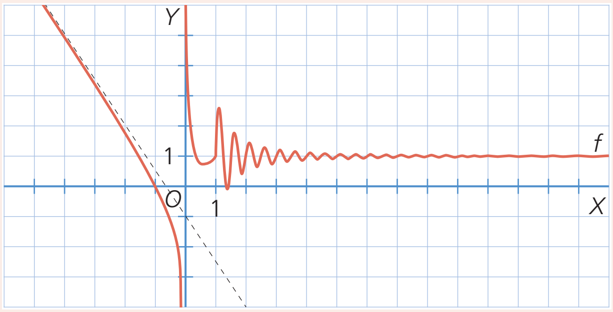
b)



c)



d)



24 Representa una función que tenga una asíntota horizontal, una vertical y una oblicua de forma que $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (3x - 2)) = 0^-$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + 1 = 0^+$.

25 Indica si estas funciones tienen asíntotas horizontales y cuáles son.

a) $f(x) = \dfrac{6x - 1}{3x + 2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x^2 - 1}}{3x + 2}$

b) $f(x) = \dfrac{12x}{3x^3 + 2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{6x + 5}{\sqrt{4x^2 - 1} + x}$

S: a) $y = 2$ **b)** $y = 0$ **c)** $y = -1$, $y = 1$ **d)** $y = 2$, $y = -6$

26 Indica si las siguientes funciones tienen asíntotas oblicuas y cuáles son.

a) $f(x) = \dfrac{6x^3 - x^2 + 1}{2x^2 + x}$ **c)** $f(x) = \sqrt{9x^2 - 6x + 4}$

b) $f(x) = \dfrac{4x^4 - 2x^2 + 1}{2x^3 - x^2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^6 - 8x^5 + 4}}{x^2 - x}$

S: a) $y = 3x - 2$ **b)** $y = 2x$
c) $y = 1 - 3x$, $y = 3x - 1$
d) $y = -2x$, $y = 2x$

27 Averigua el valor de a para que la función $f(x) = \dfrac{ax^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1}$ tenga como asíntota oblicua la recta $y = 2x + 1$.

S: $a = 2$

28 Determina el valor de a para que la función $f(x) = \dfrac{3x^2 + ax + 19}{x - 5}$ tenga como asíntota oblicua la recta $y = 3x - 4$.

S: $a = -19$

29 Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x - 12}}{x^2 - 4x}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x - \sqrt[3]{x - 1}}{x^2 - \sqrt{6 - 5x}}$

b) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x \cdot \ln(9 - x^2)}$ **d)** $f(x) = \text{sen}\left(\sqrt{1 - x^2}\right) - \dfrac{1}{x + 1}$

S: a) $[4, +\infty)$ **b)** $(-3, 3) - \left\{0, \pm\sqrt{8}\right\}$
c) $(-\infty, 6/5] - \{-2, 1\}$ **d)** $(-1, 1]$

30 Indica si las siguientes funciones tienen asíntotas verticales y cuáles son.

a) $f(x) = \dfrac{\log x}{x - 2}$ **c)** $f(x) = \text{tg}\left(\sqrt{\pi - x^2}\right)$

b) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{\arccos x}$

S: a) $x = 0$, $x = 2$ **b)** $x = 0$
c) $x = \pm\dfrac{\sqrt{4\pi - \pi^2}}{2}$ **d)** $x = 1$

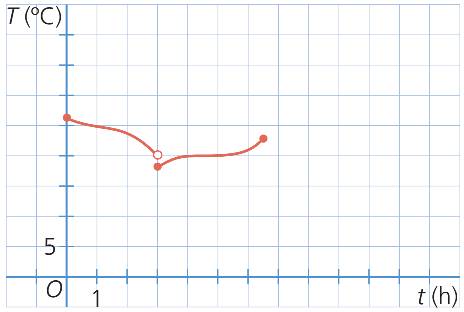
Desafío matemático

31 Demuestra que la función $f(x) = \dfrac{L \cdot A_0 \cdot e^{ax}}{L + A_0\left(e^{ax} - 1\right)}$ con $a > 0$ tiene una asíntota horizontal $y = L$ y $f(0) = A_0$.

4 Continuidad

Amaya ha revisado desde su teléfono móvil el histórico del termostato de su casa mientras estaba de vacaciones. Los datos vienen representados en esta gráfica.

En ella, se relaciona la temperatura que ha habido en su casa respecto al tiempo que ha estado funcionando desde que lo conectó cuando se marchó.



A las 3 h de funcionamiento, puede verse un salto en la gráfica, algo que Amaya sabe que no es posible ya que esta función debe ser continua, por tanto, concluye que en ese momento debió haber un corte de luz.

Si tuviera la expresión algebraica de la función, podría comprobarlo analíticamente.

Si a es un punto del dominio de una **función** f, esta es **continua en** $x = a$ si:

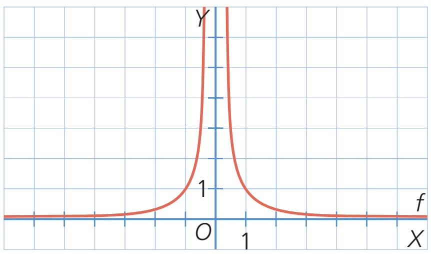
1. existe $f(a)$. **2.** existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. **3.** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Una **función** es **continua en un intervalo abierto (a, b),** si lo es en todos sus puntos.

Observamos que, en el ejemplo anterior, la función no está definida en $x = 3$, por tanto, Amaya tendría que haber calculado los límites laterales para analizar si la función es continua en este punto.

- Una función es **continua por la derecha** en $x = a$ si existe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ y $f(a) = L$.
- Una función es **continua por la izquierda** en $x = a$ si existe $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ y $f(a) = L$.

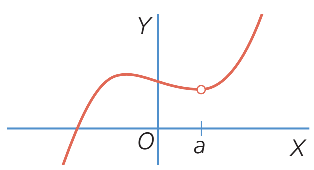
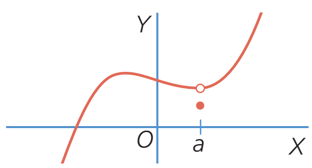
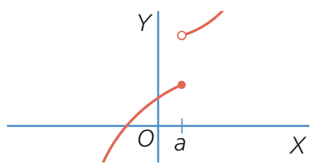
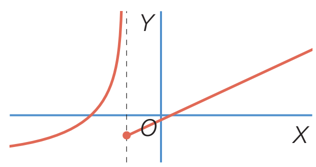
Una **función** es **continua en un intervalo cerrado [a, b],** si es continua en el intervalo abierto (a, b) y, además, lo es por la derecha en $x = a$ y por la izquierda en $x = b$.



Cuando una función es continua en todos los puntos de su dominio, decimos que es una **función continua**. Así, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ es continua en su dominio, aunque en $x = 0$ presenta un punto de discontinuidad ya que no está definida en él.

Si en algún punto a del dominio de f no se cumple alguna de estas condiciones, la función presenta un **punto de discontinuidad** en $x = a$.

Dependiendo de qué condición no se cumpla, se dan diferentes **tipos de discontinuidad.**

Discontinuidad evitable		**Discontinuidad inevitable**	
Existe. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$		No existe. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$	
		De salto finito 	De salto infinito 
No existe $f(a)$.	$\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq \pm\infty$	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ y/o $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

Así, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

4.1. Continuidad en funciones elementales. Propiedades

Para estudiar la continuidad de una función en un intervalo mediante su expresión algebraica, debemos tener en cuenta que las funciones elementales son continuas en su dominio, es decir:

- las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$.
- las funciones racionales son continuas en $\mathbb{R}$, salvo en los puntos donde se anula el denominador.
- las funciones radicales impares son continuas en $\mathbb{R}$ y las pares son continuas donde el radicando sea no negativo.
- las funciones exponenciales son continuas en $\mathbb{R}$.
- las funciones logarítmicas son continuas donde sea positiva la expresión a la que se le toma el logaritmo.
- las funciones seno y coseno son continuas en $\mathbb{R}$ y la tangente lo es en $\mathbb{R}$, salvo en los puntos donde el ángulo vale un múltiplo entero de $\frac{\pi}{2}$.

4.2. Operaciones

La continuidad es una propiedad que se conserva al realizar las operaciones con funciones. De este modo, si f, g son funciones continuas en $x = a$ se cumple que:

- $(f + g)(x)$ y $(f \cdot g)(x)$ son funciones continuas en $x = a$.
- si $g(a) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ también es continua en $x = a$.
- si $g(a) \in \text{Dom } f$, entonces $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es una función continua en $x = a$. Lo mismo ocurre con $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ si $f(a) \in \text{Dom } g$.

Ejercicio resuelto

32 **Estudia la continuidad de esta función:** $f(x) = \begin{cases} e^{2x-1} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{3x^2+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Solución

Es una función definida a trozos. Por tanto, analizamos la expresión algebraica de cada rama y el punto donde se unen sus ramas.

- $y = e^{2x-1}$ es continua en su dominio $(-\infty, 1)$ por tratarse de la composición $(g_2 \circ g_1)(x)$, donde $g_1(x) = 2x - 1$ y $g_2(x) = e^x$, y ambas ser funciones continuas.
- $y = \sqrt{3x^2+1}$ es continua en su dominio $[1, +\infty)$ por tratarse de la composición $(h_2 \circ h_1)(x)$, donde $h_1(x) = 3x^2 + 1$ y $h_2(x) = \sqrt{x}$, y ambas ser continuas.
- Para averiguar si f es continua en $x = 1$:
  1. Determinamos $f(1)$: $f(1) = \sqrt{3 \cdot 1^2 + 1} = 2$
  2. Calculamos los límites laterales en $x = 1$ y si son iguales, existe el límite en este punto y debemos comprobar si su valor coincide con $f(1)$.

     $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} e^{2x-1} = e^{2 \cdot 1-1} = e \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{3x^2+1} = \sqrt{3 \cdot 1^2 + 1} = 2$

     Como son distintos, no existe el límite en $x = 1$, y f no es continua en él.

Así, f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, y en $x = 1$ tiene una discontinuidad de salto finito.

Presta atención

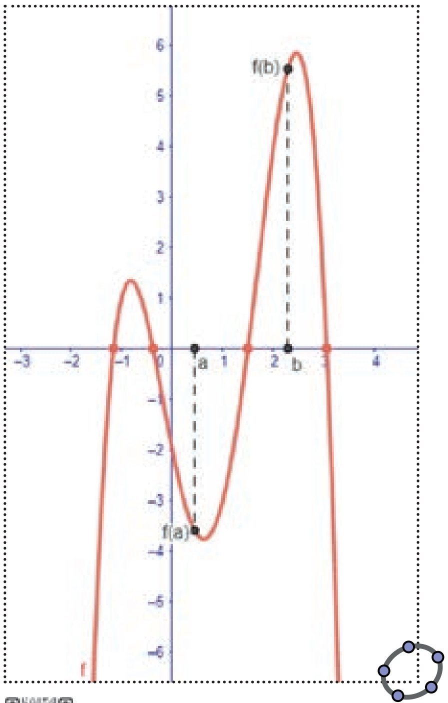
Si una función está definida a trozos, es importante estudiar los puntos donde se unen sus ramas.

4.3. Teorema de Bolzano

Sandra y Óscar han visitado el valle de Ordesa, y han pasado una noche en el refugio de Góriz. Durante la ascensión se han ido deteniendo para verlo todo y hacer fotos. Al día siguiente realizaron el descenso parando en lugares para refugiarse ya que estaba lloviendo. Como ambos días empezaron a andar a la misma hora, discuten si en algún momento del descenso estaban en el mismo lugar que el día anterior.

Para resolver este problema necesitan conocer algunos resultados importantes sobre continuidad de funciones.

Teorema de Bolzano. Si f es una función continua en $[a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de signos distintos, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ de forma que $f(c) = 0$.



22mt0b202

Este teorema indica que, si una función es continua en un intervalo y tiene distinto signo en sus extremos, en algún punto atraviesa el eje X y vale 0.

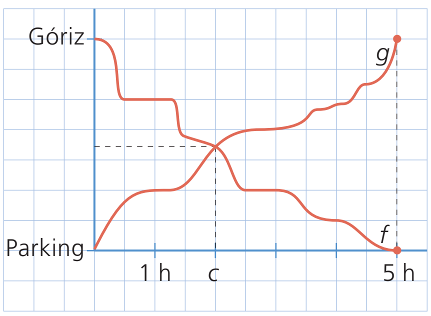
Para demostrarlo, aplicamos el **método de la bisección de intervalos,** vamos a suponer que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ (si fuese al contrario la demostración es análoga):

1. Elegimos el punto medio del intervalo $I = [a, b]$, $c_1 = \dfrac{a+b}{2}$, y vemos qué signo tiene $f\left(c_1\right)$. Puede ocurrir que:
   - Si $f\left(c_1\right) = 0$, entonces, hemos acabado.
   - Si $f\left(c_1\right) < 0$, entonces, $c_1 = a_1$ y $b_1 = b$.
   - Si $f\left(c_1\right) > 0$, entonces, $a = a_1$ y $c_1 = b_1$.

   De esta forma obtenemos un nuevo intervalo $I_1 = \left[a_1, b_1\right]$ con $f\left(a_1\right)$ y $f\left(b_1\right)$ de signos distintos y cuya amplitud es la mitad que la del anterior.
2. Repetimos el paso anterior con I_1: elegimos $c_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$ y si $f\left(c_2\right) \neq 0$, nos quedamos con la mitad del intervalo cuyas imágenes de los extremos tengan distinto signo y lo llamamos $I_2 = \left[a_2, b_2\right]$.
3. Si repitiendo el proceso n veces, resulta una sucesión de intervalos encajados, $I \subset I_1 \subset I_2 \subset ...$, cuya amplitud es la mitad que la del anterior. Así, la amplitud de I_n es $\dfrac{b-a}{2^n}$. Si ninguno de estos c_n cumple que $f\left(c_n\right) = 0$, la sucesión que forman las amplitudes de estos intervalos tiende a 0 en infinito, y por tanto, se trataría de un único punto c que es el punto buscado.

De este teorema se deducen estos dos resultados.

Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ de forma que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$ entonces, existe al menos un valor $c \in (a, b)$ de forma que $f(c) = g(c)$.



Podemos usar este resultado para resolver el problema de Sandra y Óscar, pues si f representa la distancia recorrida desde el aparcamiento dependiendo del tiempo el primer día y g, la distancia recorrida el segundo día, ambas funciones son continuas y cumplen las condiciones indicadas.

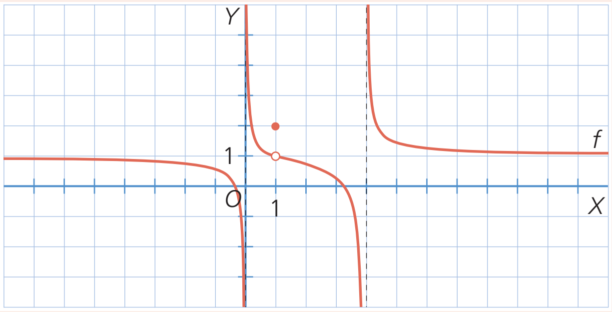
Por tanto, en algún instante c estaban en el mismo sitio, es decir, se cumple que: $f(c) = g(c)$

Teorema de Darboux o de los valores intermedios. Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

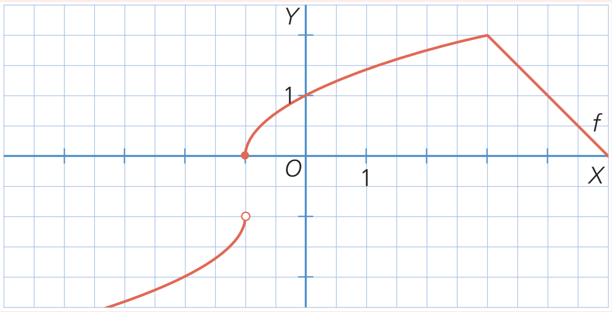
Actividades

33 Estudia la continuidad de las siguientes funciones y si hay puntos de discontinuidad, indica de qué tipo son.

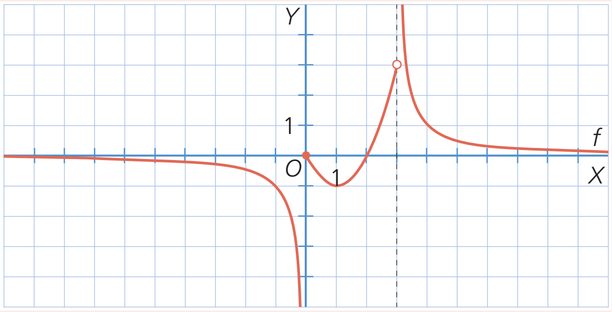
a)



b)



c)



34 Estudia la continuidad de estas funciones y si hay puntos de discontinuidad, indica de qué tipo son.

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+5}{x+3} & \text{si } x<3 \\ \ln(x-3) & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x<3 \\ \dfrac{x^2-1}{2^x-4} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{\cos x} & \text{si } x\leq 1 \\ \dfrac{2x-1}{e^{x-1}-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\pi}{\sqrt{x}-\sqrt{\pi}} & \text{si } x\leq \pi \\ \sqrt{x-\pi} & \text{si } x>\pi \end{cases}$

S: a) $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$
b) $[-1, +\infty)$ **c)** $\mathbb{R} - \{1\}$
d) $[0, \pi) \cup (\pi, +\infty)$

35 Halla el valor de a para que la siguiente función sea continua en su dominio:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-2x-4}{x^2-5x+6} & \text{si } x\neq 2 \\ a & \text{si } x=2 \end{cases}$$

S: $a=-10$

36 Estudia la continuidad de esta función y si hay puntos de discontinuidad, indica de qué tipo son:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{2-|x-3|} & \text{si } x\leq 4 \\ \dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt{x-4}} & \text{si } x>4 \end{cases}$$

S: Es continua en $[1, 4) \cup (4, +\infty)$.
En $x = 4$, discontinuidad de salto finito.

37 Halla el valor de a para que sean continuas:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{2x+|x-3|} & \text{si } x\neq 3 \\ a & \text{si } x=3 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} ax+1 & \text{si } x\leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$

S: a) $a=0$ **b)** $a=-1/2$

38 Demuestra que la ecuación $x = \cos x$ tiene una raíz real positiva.

39 Demuestra que la ecuación $2 - x = e^x$ tiene una raíz real positiva.

Ejercicio resuelto

40 Calcula la solución a la ecuación $x^3+x=1$ con un error menor que 0,1.

Solución

Vamos a utilizar el método de la bisección con la función $f(x)=x^3+x-1$.

Esta función cumple que $f(0)=-1<0$ y $f(1)=1>0$ y por el teorema de Bolzano hay al menos un $c \in (0, 1)$ con $f(c) = 0$. Podemos reducir el intervalo hasta una longitud de 0,1: $f(0{,}1)=-0{,}9$; $f(0{,}2)=-0{,}8$;

$f(0{,}3)=-0{,}7$; $f(0{,}4)=-0{,}5$; $f(0{,}5)=-0{,}4$;

$f(0{,}6)=-0{,}2$ y $f(0{,}7)=0{,}05$

Por el teorema de Bolzano, hay un $c \in (0{,}6;\, 0{,}7)$ con $f(c) = 0$. Tomando cualquier valor de ese intervalo como c, el error cometido es menor a 0,1.

41 Halla una solución positiva a la ecuación $x^3 = 4x + 2$ con un error menor que 0,1.

Investigación

42 Utiliza el teorema de Bolzano para obtener una demostración de los dos resultados que se derivan de este teorema.

Ejercicios resueltos

Cálculo de límites

43 Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+x-4}{\sqrt{3x^2+1}}-\dfrac{x^2-7}{1-2x}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-3x}}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{8}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$

Solución

a) Como el límite es a $-\infty$ sustituimos x por $-x$ y calculamos el límite cuando x tiende a $+\infty$, y resulta:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x-4}{\sqrt{3x^2+1}}-\frac{x^2-7}{1-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x-4}{\sqrt{3x^2+1}}-\frac{x^2-7}{1+2x}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}-\frac{\infty}{\infty}\right]=[\infty-\infty]$$

, que es una indeterminación ya que, para cada función racional, el límite es $+\infty$ puesto que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Para resolverla, operamos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x-4}{\sqrt{3x^2+1}}-\frac{x^2-7}{1+2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-x-4\right)(1+2x)-\left(x^2-7\right)\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{3x^2+1}(1+2x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-4+2x^3-2x^2-8x-x^2\sqrt{3x^2+1}+7\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{3x^2+1}(1+2x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=+\infty,$$ por comparación de grados.

b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-3x}}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{8}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$, que es una indeterminación. Para resolverla, tenemos que factorizar, y para ello, eliminamos las raíces del denominador, multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador:

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{x^2-3x}}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{8}}=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{x^2-3x}\cdot\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{8}\right)}=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{x^2-3x}\cdot\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{8}\right)}{x^2-1-8}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x^{1/3}\cdot\sqrt[3]{x-3}\cdot\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{8}\right)}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{x^{1/3}\cdot\sqrt[3]{x-3}\cdot\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{8}\right)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to3}\frac{x^{1/3}\cdot\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{8}\right)}{\sqrt[3]{(x-3)^2}\,(x+3)}=\frac{3^{1/3}\left(\sqrt{8}+\sqrt{8}\right)}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to3^+}\frac{x^{1/3}\cdot\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{8}\right)}{\sqrt[3]{(x-3)^2}\,(x+3)}=\frac{\sqrt[3]{3}\cdot2\sqrt{8}}{0^+}=+\infty,\quad\lim_{x\to3^-}\frac{x^{1/3}\cdot\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{8}\right)}{\sqrt[3]{(x-3)^2}\,(x+3)}=\frac{\sqrt[3]{3}\cdot2\sqrt{8}}{0^+}=+\infty$$

Como los límites laterales son iguales, tenemos que: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-3x}}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{8}}=+\infty$

c) Para resolver $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$, como la función $f(x)=\operatorname{sen}x$ es periódica, no podemos sustituir x por un valor concreto.

Sabemos que dicha función está acotada entre -1 y 1, luego podemos escribir que: $\dfrac{-1}{x}\le\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\le\dfrac{1}{x}$

Si calculamos el límite cuando x tiende a $+\infty$ para cada expresión, resulta:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}\le\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\le\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\to0\le\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\le0,$$ por tanto: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=0$

Ahora tú

44 Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{4x^2-3x}}{3x-2}-\dfrac{2x-1}{2-3x}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x^3-x-2}}{\sqrt{5x-1}-2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x\cos\left(x^2+1\right)}{x^2-1}$

Asíntotas

45 **Determina las asíntotas de esta función:** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+3)}{2x+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{3x^3 - 7x - 10}{x^2 - 2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Solución

Como $y = \ln(x+3)$ es continua en $(-3, +\infty)$ e $y = 2x + 1$ se anula en $x = -\dfrac{1}{2}$, la primera rama de la función es continua en $\left(-3,\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ y debemos estudiar los límites en $x = -3$, $x = -\dfrac{1}{2}$ y $x = 0$.

La otra rama es una función racional cuyo denominador se anula en $x = 0$ y $x = 2$, esta función es continua en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$ y debemos estudiar los límites en $x = 0$ y $x = 2$.

- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{\ln(x+3)}{2x+1} = \left[\dfrac{\ln(0^+)}{-5}\right] = +\infty \rightarrow x = -3$ es una asíntota vertical.
- $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} \dfrac{\ln(x+3)}{2x+1} = \left[\dfrac{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}{0^+}\right] = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^-} \dfrac{\ln(x+3)}{2x+1} = -\infty \rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ es otra asíntota vertical.
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\ln(x+3)}{2x+1} = \ln 3$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3 - 7x - 10}{x^2 - 2x} = \dfrac{-10}{0^+} = +\infty \rightarrow x = 0$ es otra asíntota vertical.
- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^3 - 7x - 10}{x^2 - 2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(3x^2 + 6x + 5)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 + 6x + 5}{x} = \dfrac{29}{2} \rightarrow x = 2$ no es una asíntota.

Para obtener las asíntotas horizontales u oblicuas tendríamos que calcular los límites cuando x tiende a $+\infty$ y $-\infty$.

Como $\text{Dom } f = \left(-3,\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right) \cup (0,\ 2) \cup (2,\ +\infty)$ solo tenemos que hallar el límite cuando x tiende a $+\infty$.

No tiene asíntota horizontal porque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^3 - 7x - 10}{x^2 - 2x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = +\infty$, ya que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, pero sí asíntota oblicua de la forma $y = mx + n$:

- $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{3x^3 - 7x - 10}{x^2 - 2x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^3 - 7x - 10}{x^3 - 2x^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 3$, al quedarnos con los coeficientes de las x de mayor grado.
- $n = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^3 - 7x - 10}{x^2 - 2x} - 3x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^3 - 7x - 10 - 3x^3 + 6x^2}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 7x - 10}{x^2 - 2x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 6$, por ser del mismo grado. Así, la ecuación de la asíntota oblicua es: $y = 3x + 6$

Ahora tú

46 **Calcula las asíntotas de esta función:** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+5}}{3x+2} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{2x^3 + 3x - 5}{x^2 - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Continuidad

47 Halla los valores de a y b para que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-6}{x-\sqrt{2}} & \text{si } x < \sqrt{2} \\ ax+b & \text{si } \sqrt{2} \le x \le 5 \\ \dfrac{4x^2-10x-50}{x-5} & \text{si } x > 5 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$.

Solución

- $y = \dfrac{3x^2-6}{x-\sqrt{2}}$ es continua en $\left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$ por tanto, lo es en su dominio de definición, $\left(-\infty, \sqrt{2}\right)$.
- $y = ax+b$ es continua en $\mathbb{R}$ por tratarse de una función polinómica, luego lo es en $\left(\sqrt{2}, 5\right)$.
- $y = \dfrac{4x^2-10x-50}{x-5}$ es continua en $(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$ por lo que es continua en $(5, +\infty)$.

De este modo, tenemos que f es continua en $\left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, 5\right) \cup (5, +\infty)$, así que solo falta analizar los puntos en los que se unen sus ramas.

- $x = \sqrt{2}$:

  1. $f\left(\sqrt{2}\right) = a\sqrt{2} + b$
  2. $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to \sqrt{2}^-} \dfrac{3x^2-6}{x-\sqrt{2}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to \sqrt{2}^-} \dfrac{3\left(x^2-2\right)}{x-\sqrt{2}} = \lim\limits_{x \to \sqrt{2}^-} \dfrac{3\cancel{\left(x-\sqrt{2}\right)}\left(x+\sqrt{2}\right)}{\cancel{x-\sqrt{2}}} = \lim\limits_{x \to \sqrt{2}^-} 3\left(x+\sqrt{2}\right) = 6\sqrt{2} \\ \lim\limits_{x \to \sqrt{2}^+} (ax+b) = a\sqrt{2}+b \end{cases}$

  Para que exista el límite, debe ocurrir que: $a\sqrt{2} + b = 6\sqrt{2}$

- $x = 5$:

  1. $f(5) = 5a + b$
  2. $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 5^-} (ax+b) = 5a+b \\ \lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{4x^2-10x-50}{x-5} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{(4x+10)\cancel{(x-5)}}{\cancel{x-5}} = \lim\limits_{x \to 5^+} (4x+10) = 30 \end{cases}$

  Para que exista el límite, debe ocurrir que: $5a + b = 30$

  Luego, para que la función sea continua se tiene que cumplir que: $\left.\begin{array}{l} a\sqrt{2}+b = 6\sqrt{2} \\ 5a+b = 30 \end{array}\right\}$

  Para resolver este sistema, restamos las ecuaciones: $5a - a\sqrt{2} = 30 - 6\sqrt{2}$

  $$\to a = \frac{30-6\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} = \frac{6\cancel{\left(5-\sqrt{2}\right)}}{\cancel{5-\sqrt{2}}} = 6 \to b = 0$$

Ahora tú

48 Halla los valores de a y b para que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{16-4x}}{x-2} & \text{si } x < -1 \\ ax+b & \text{si } -1 \le x \le 5 \\ \dfrac{x^2-6x+5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} & \text{si } x > 5 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$.

49 Considera las funciones $f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$ y $g(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1}$.

a) Comprueba si se cortan en algún valor de x positivo.

b) Demuestra que hay un valor a positivo de forma que $f(a) = 2$.

Solución

a) $x^2+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Luego la función f es continua por ser una función logarítmica de valores que siempre son positivos.

De la misma forma, la función g es continua por ser una función racional en la que el denominador no se anula para ningún valor real.

Hallamos y comparamos los valores de ambas funciones si $x = 0$:

$f(0) = \ln(0^2+1) = 0$

$g(0) = \dfrac{0^2-0+2}{0^2+1} = 2$

$f(0) < g(0)$

Si $x = 1$:

$f(1) = \ln(1^2+1) = \ln 2$

$g(1) = \dfrac{1^2-1+2}{1^2+1} = 1$

$f(1) < g(1)$

Como el signo no ha cambiado, repetimos con $x = 2$:

$f(2) = \ln(2^2+1) = \ln 5$

$g(2) = \dfrac{2^2-2+2}{2^2+1} = \dfrac{4}{5}$

$f(2) > g(2)$

Aplicamos la consecuencia del teorema de Bolzano, al ser dos funciones continuas en $[1, 2]$ y cumplir que $f(1) < g(1)$ y $f(2) > g(2)$, se verifica que existe un valor $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = g(c)$.

b) $f(2) = \ln 5 < 2 \qquad f(3) = \ln(3^2+1) = \ln 10 > 2$

Por el teorema de Darboux o de los valores intermedios, al ser f continua en $[2, 3]$ con $f(2) < 2$ y $f(3) > 2$, se cumple que existe un valor $a \in (2, 3)$ de forma que $f(a) = 2$.

22mt0b203

Ahora tú

50 Considera las funciones $f(x) = x^2 - 3^x$ y $g(x) = \dfrac{4\,\text{sen}\,x}{x}$.

a) Comprueba que ambas se cortan para algún valor x negativo.

b) Demuestra que hay un valor a positivo de forma que $g(a) = 3$.

51 Dada la función $f(x) = \text{cotg}\,x$, se cumple que $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ y $f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$ tienen signos diferentes y no hay ningún valor $c \in \left[\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

Solución

Tenemos que $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -1 < 0$ y $f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = 1 > 0$, sin embargo, para que se cumpla el teorema de Bolzano la función debe ser continua en el intervalo $\left[\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$ y $f(x) = \text{cotg}\,x$ no lo es ya que presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = \pi$.

Ahora tú

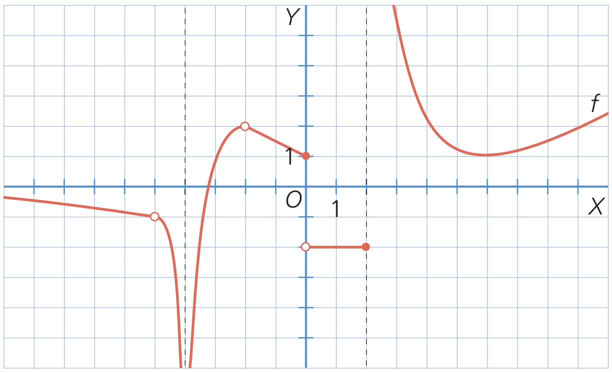
52 ¿Podemos aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \text{sen}\,(2x) + \cos\,(3x)$ en el intervalo $[0, \pi]$?

La función f tiene 3 raíces en el intervalo $[0, \pi]$. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

Actividades de síntesis

Concepto de límite. Definición

53 A partir de esta gráfica, indica el valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.



A continuación, halla $f(a)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ si:

a) $a = 6$ **d)** $a = -2$

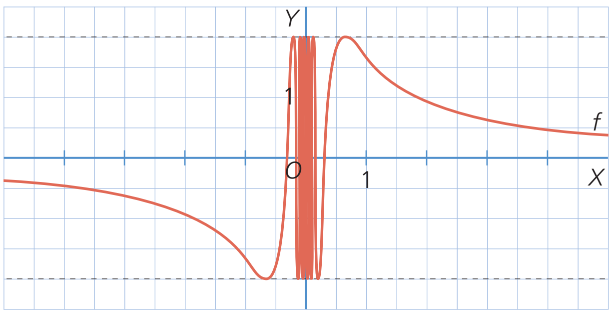
b) $a = -4$ **e)** $a = 0$

c) $a = -5$ **f)** $a = 2$

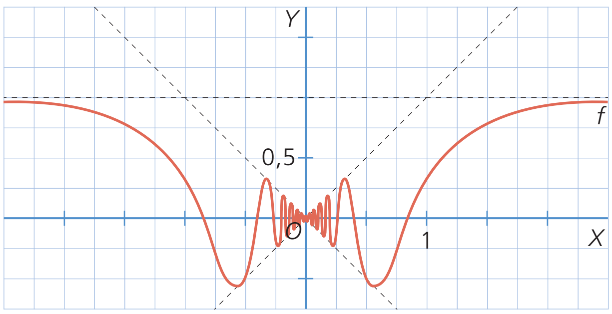
54 Observa las gráficas representadas, e indica el valor de los límites:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

a)



b)



S: a) No existe. 0, 0 **b)** 0, 1, 1

55 Utiliza la definición para demostrar que $\lim\limits_{x \to 2} (5x - 3) = 7$.

56 Utiliza la definición para demostrar que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x-1}{2x-1} = 2$.

57 Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 2x - 3}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{\sqrt{x^3 - 16x}}{x^2 - 2x - 8}$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{2x^3 - 14x + 12}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x}}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$

S: a) 1/2 **b)** −3/20 **c)** +∞ **d)** 0

58 Halla el valor de estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - x}}{\sqrt{2x^2 + 1}}$ **c)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x + 2}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - x}{x - 1}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - 1}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

S: a) $-\sqrt{2}/2$ **b)** −1 **c)** 0 **d)** −∞

59 Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-2} - \dfrac{3x^2 - 1}{x + 2}\right)$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x+2} - \sqrt{5x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2}{2x-2} - \dfrac{2x^3 + x}{4x^2 + 1}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 2x} + x$

S: a) −∞ **b)** 1/2 **c)** −∞ **d)** −1

60 Calcula estos límites, resolviendo las indeterminaciones correspondientes.

a) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{x^2 - 2}{x + 4}\right)^{\frac{2}{x+2}}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 + x}{2x^2 - x}\right)^{x^2 - 2x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3 - x}{\sqrt{x^2 - 2}}\right)^{3-x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{5}{\sqrt{x^3 - 2}}\right)^{3x+2}$

S: a) $1/e^5$ **b)** e^3 **c)** +∞ **d)** 1

61 Determina los siguientes límites según el valor de *k*.

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 3x + k}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{\sqrt{x - 4}}{\sqrt{x - k}}$

b) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{\sqrt{x + 2}}{x^2 - k}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{kx^5 + 3x^4 + x - 4}}{2x^2 + 5x - 3}$

62 ¿Cuál es el valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{ax^2 + b}{ax^2 - x}\right)^{\frac{bx}{3}}$, siendo *a* y *b* números reales positivos?

S: $e^{\frac{b}{3a}}$

63 Indica el valor de los siguientes límites siendo:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-6x}{x\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x<1\\[2mm] \dfrac{\sqrt{x^3-1}}{x^2-1} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

S: a) 0 b) -6 c) No existe.

64 Sea la función $f(x)=\dfrac{3x}{x+2}$, calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(f(x+1)-f(x)\right)$$

S: 6

65 Dada la función $f(x)=\sqrt{4x^2-6x}$, calcula este límite: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

S: 5/2

Asíntotas. Dominio de la función

66 Determina el dominio de estas funciones.

a) $f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(x+2)}$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{2-\sqrt{x^2-4}}$

c) $f(x)=\dfrac{\text{arcsen}(x+1)}{1+\text{arccos}\, x}$

d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{\ln\left(x^2-1\right)}{1+\text{sen}^2\, x}}$

S: a) $(-2, e-2)\cup(e-2, +\infty)$
b) $(-\infty, -2)\cup(2, +\infty)-\left\{\pm 2\sqrt{2}\right\}$ c) $[-1, 0]$
d) $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2}, +\infty\right)$

67 Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2-4} & \text{si } x<1\\[2mm] \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x+1} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-4} & \text{si } x\leq 1\\[2mm] \dfrac{\ln\left(x^2-3x+2\right)}{x^2} & \text{si } x>1\end{cases}$

S: a) $(-\infty, -2)\cup(-2, 3]$
b) $(-\infty, -2)\cup(-2, 1]\cup(2, +\infty)$

68 Determina las asíntotas de las siguientes funciones e indica su posición respecto a ellas.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-5x^2+3x}{x^2-4x+3} & \text{si } x<0\\[2mm] \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2-4}} & \text{si } x<-2\\[2mm] \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} & \text{si } x\geq -2\end{cases}$

S: a) $y=2x+3$; $y=1$
b) $y=-3$; $x=-2$

69 Halla las asíntotas de estas funciones.

a) $f(x)=\begin{cases}x+e^x & \text{si } x\leq 0\\[2mm] \dfrac{1}{\log x} & \text{si } x>0\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\text{arctg}\,(x-\pi) & \text{si } x\leq 0\\ \text{sen}\, x-\log(x-2) & \text{si } x>0\end{cases}$

S: a) $y=x$; $x=1$; $y=0$
b) $y=-\pi/2$

70 Calcula las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{1}{2-\ln(x+2)}$ c) $f(x)=e^{-x^2}$

b) $f(x)=\dfrac{2}{1-3^x}$ d) $f(x)=x\ln(\ln x)$

S: a) AV: $x=e^2-2$; AH: $y=0$
b) AH: $y=2$, $y=0$; AV: $x=0$
c) $y=0$ d) $x=1$

71 Determina las asíntotas de las siguientes funciones con valor absoluto, escribiendo primero la función definida a trozos equivalente en cada caso sin dicho valor absoluto.

a) $f(x)=\dfrac{2x+|6x-1|}{2x-4}$ c) $f(x)=\dfrac{x^3+\left|x^3+1\right|}{x^2-4}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2\left(1+|x-1|\right)}{x^2-9}$ d) $f(x)=\dfrac{|6x-2|-4x}{x-1}$

S: a) AH: $y=-2$, $y=4$; AV: $x=2$
b) AO: $y=x$, $y=2-x$; AV: $x=-3$, $x=3$
c) AH: $y=0$; AO: $y=2x$; AV: $x=-2$, $x=2$
d) AH: $y=2$, $y=-10$

72 Representa una función, f, que cumpla que:

- $\text{Dom } f = (-\infty, 0] \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$
- tenga como asíntotas: $y = -2$, $y = x - 1$, $x = 1$
- presente una discontinuidad evitable en $x = 3$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $f(x) \leq 0$ para cualquier $x \in \text{Dom } f$.

73 **Halla los límites en el infinito de la función $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ conocida como tangente hiperbólica e indica cuáles son sus asíntotas.**

S: AH: $y = -1$, $y = 1$

74 Responde a las siguientes cuestiones.

a) ¿Puede una función periódica no constante tener asíntotas horizontales, oblicuas o verticales?

b) Determina las asíntotas de las funciones:

- $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3} + \text{tg } x}$
- $f(x) = \dfrac{\cos(2\pi x)}{1 - \cos(2\pi x)}$

S: **a)** Puede tener verticales, pero no horizontales ni oblicuas. **b)** $x = \dfrac{2\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$

75 **Un ayuntamiento quiere promover un bono de ayuda a la compra de primera vivienda. Para ello, estudian el aumento del precio, en €, de las ofertas disponibles en la ciudad y encuentran que sigue la función $f(t) = \dfrac{5000t^2 + at}{t + 1}$, donde t está expresado en años.**

a) Si el precio tiene un aumento asintótico de la forma $y = 5\,000t - 6\,000$, calcula el valor de a.

b) Halla el aumento del precio los primeros dos años.

c) ¿Qué error se asume al sustituir la función por su asíntota el quinto año?

S: **a)** $a = -1000$ **b)** 2 000 €, 6 000 € **c)** 1000 €

76 **En un parque natural se ha vuelto a introducir una especie de mariposa que había desaparecido de la zona a causa de la deforestación. Los científicos prevén que la población seguirá la función $f(t) = \dfrac{125t + 15 - \sqrt{80t}}{t + 2}$, aproximadamente, con t expresado en meses.**

a) ¿Cuántas mariposas se han introducido inicialmente?

b) ¿Qué ocurre con la población de mariposas al transcurrir un período largo de tiempo?

77 **Hemos estudiado en Física la ley de Boyle que indica que a temperatura constante, el volumen de un gas es inversamente proporcional a la presión a la que es sometido, es decir, $V = \dfrac{k}{p}$, siendo k una constante.**

a) Halla el valor de k para un gas que a 2 atmósferas de presión ocupa un volumen de 20 L.

b) ¿Qué ocurre si vamos aumentando la presión a dicho gas? ¿Y si vamos disminuyendo la presión cada vez más hasta casi presión nula?

S: **a)** $k = 40$ atm · L
b) Al aumentar la presión, el volumen tiende a cero, y al disminuir la presión, el volumen tiende a infinito.

Continuidad

78 **Decide si estas funciones son continuas en el punto que se indica en cada caso.**

a) $f(x) = |2x + 2| - 2x$, en $x = -2$

b) $f(x) = \dfrac{x - |x - 1|}{|x| - 1}$, en $x = 1$

c) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$, en $x = 2$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x^3 - 9x}}$, en $x = 3$

S: **a)** Sí **b)** No
c) Sí **d)** No

79 **Averigua si las siguientes funciones son continuas en el intervalo que se indica en cada caso.**

a) $f(x) = |x^2 - 1| - 2x$, en $[0, 2]$

b) $f(x) = x\ln(x^2 - 4) + |x - 5|$, en $[2, 5]$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3 - x}}{\sqrt[3]{x^2 - x - 6}}$, en $[0, 3]$

d) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{\text{tg } x}$, en $(0, 1)$

S: **a)** Sí **b)** No
c) No **d)** Sí

80 Decide si las siguientes funciones son continuas y determina el tipo de discontinuidades que posee cada una de ellas.

a) $f(x) = \begin{cases} x + e^x & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{\log x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 3^{-x} & \text{si } x \le -1 \\ \dfrac{\sqrt{4x^2 - 3}}{x + 2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \text{arctg}\left(x^2 - 1\right) & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{\cos(\pi x)} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3 - x^2}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 2x - 3} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

S: a) Es continua en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.
b) Es continua en $\left(-\infty, -\sqrt{3}/2\right] \cup \left[\sqrt{3}/2, +\infty\right)$.
c) Es continua en $\mathbb{R} - \{1/2 + k\} \cup \{1\}$. En $x = 1/2 + k$, con $k \in \mathbb{N}$, presenta una discontinuidad de salto infinito y en $x = 1$ de salto finito.
d) Es continua en $\left(-\sqrt{3}, 3\right) \cup (3, +\infty)$.

81 Halla el valor de a para que la siguiente función sea continua en el intervalo $[0, +\infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x^2 - 25} & \text{si } x \ne 5 \\ a & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

S: $a = \sqrt{5}/100$

82 Determina una función que tome los mismos valores que $f(x) = x^2 + 3x + 1$ en $\mathbb{R}$ salvo en el punto de abscisa $x = 3$, en el que no tiene que estar definida.

83 Demuestra que la ecuación $x^3 = 5 - 3x$ tiene solución real.

84 Demuestra que la ecuación $3^{-x} = 3 + \text{sen } x$ tiene solución real.

85 Utiliza el teorema de Bolzano para obtener la solución de la ecuación $\dfrac{1}{x} = \ln x$ con un error menor a una décima.

86 Determina una aproximación a la solución de la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 2^{-x}$ con una precisión de décimas.

S: 1,9

87 Decide si es posible aplicar el teorema de Bolzano para asegurar que la siguiente función tiene una raíz en el intervalo $[-2, 3]$:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 5 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$$

88 Razona si es posible aplicar el teorema de Bolzano para asegurar que la siguiente función tiene una raíz en el intervalo $[-3, 0]$:

$$f(x) = \begin{cases} x\log(3 - x) & \text{si } x < -2 \\ \cos(x + 1) & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$$

89 Demuestra que las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \dfrac{2}{x^2}$ se cortan en algún punto.

90 En un centro escolar van a comprar cuadernos fabricados con material reciclado. El precio de cada uno es de n €, pero reciben un descuento por cuaderno si se compran más de 50, obteniendo un precio de $p(x) = \dfrac{9}{2} - \log(2x)$, que coincide con el precio sin descuento si se compran 50 siendo x el número de cuadernos adquiridos.

a) ¿Cuánto cuesta cada cuaderno si no compran más de 50?

b) Determina una función para obtener el dinero gastado dependiendo del número de cuadernos adquiridos.

S: a) 2,50 €

91 El coche más potente del mundo, con cerca de 1900 CV, es el Rimac Nevera y realiza un aumento de velocidad de 0 a 100 km/h en 1,85 s. Utiliza el teorema de Bolzano para asegurar que en ese tiempo alcanza la velocidad de 90 km/h.

Conocimientos básicos

Concepto de límite

- El **límite de una función cuando *x* tiende a** $+\infty$, es el valor que toma dicha función al estudiar su comportamiento para valores cada vez mayores. Se escribe: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
- El **límite de una función cuando *x* tiende a** $-\infty$, es el valor que toma dicha función al estudiar su comportamiento para valores cada vez menores. Se escribe: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
- El **límite de una función cuando *x* tiende a un punto** $x = a$, es el valor que toma dicha función al estudiar su comportamiento para valores próximos al punto, tanto mayores como menores que él. Se escribe: $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

Cálculo de límites

Al calcular límites, podemos obtener diferentes **indeterminaciones.**

Para resolverlas, procedemos de distinta forma:

- $\dfrac{\infty}{\infty} \rightarrow$ Dividimos el numerador y el denominador por la mayor potencia de x que aparezca en el cociente, y simplificamos para determinar el límite.
- $\infty - \infty \rightarrow$ Operamos. Si no es posible porque hay raíces cuadradas, primero multiplicamos y dividimos por el conjugado.
- $1^{\infty} \rightarrow$ Aplicamos esta fórmula: $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)-1) \cdot g(x)}$
- $\dfrac{0}{0} \rightarrow$ Factorizamos y simplificamos.

Asíntotas

- La recta $y = k$ es una **asíntota horizontal** de f si se cumple que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k$ o $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k$, siendo k un número real.
- La recta $y = mx + n$ es una **asíntota oblicua** de f si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = n$ con $m, n \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$.
- La recta $x = k$ es una **asíntota vertical** de f si se cumple que $\lim\limits_{x \to k^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x \to k^+} f(x) = \pm\infty$, siendo k un número real.

Continuidad

Si a es un punto del dominio de una **función** f, esta es **continua en** $x = a$ si:

1. existe $f(a)$.
2. existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si en algún punto del dominio de f no se cumple alguna de estas condiciones, la función presenta un **punto de discontinuidad** en $x = a$. Dependiendo de qué condición no se cumpla, se dan diferentes **tipos de discontinuidad.**

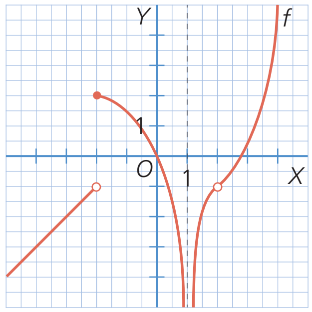
- Discontinuidad **evitable:** no existe $f(a)$ o existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ pero es distinto de $f(a)$.
- Discontinuidad **inevitable:** no existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Cuando esto ocurre, puede ser:
  - **de salto finito:** $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq \pm\infty$
  - **de salto infinito:** $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ y/o $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

Teorema de Bolzano. Si f es una función continua en $[a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de signos distintos, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ de forma que $f(c) = 0$.

Teorema de Darboux o de los valores intermedios. Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

Evaluación

1 A partir de esta gráfica de f, indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta.



a) $\lim_{x \to -2} f(x) = 2$ **c)** $\lim_{x \to -2} f(x) = -1$ **e)** Ninguna de las anteriores

b) $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$ **d)** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2 El valor de $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{5x^3+6}}{x - \sqrt[3]{x^2}}$ es:

a) 0 **b)** $-\infty$ **c)** $\sqrt[3]{5}$ **d)** $-\sqrt[3]{5}$ **e)** Ninguna de las anteriores

3 El $\lim_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{3x^2 - 9}{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}$ es:

a) 0 **b)** $+\infty$ **c)** $6\sqrt{3}$ **d)** $2\sqrt{3}$ **e)** Ninguna de las anteriores

4 El valor aproximado de la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - 3x} + 2x$ cuando x tiende a $-\infty$ es:

a) $\dfrac{3}{4}$ **b)** 0 **c)** $-\infty$ **d)** $+\infty$ **e)** Ninguna de las anteriores

5 El número de asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x^2 - 2x - 15}$ es:

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Ninguna de las anteriores

6 La recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1}$.

a) Verdadero **b)** Falso

7 La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + ax}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{3x+4} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua si:

a) $a = -2$ **b)** $a = 0$ **c)** $a = 1$ **d)** $a = 2$ **e)** Ninguna de las anteriores

8 Es posible aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1) & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en el intervalo [0, 2].

a) Verdadero **b)** Falso

Matemáticas en digital

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Para prevenir la contaminación por acumulación excesiva, se está estudiando cómo afecta la concentración de sulfatos provenientes de distintos tipos de tintes en el vertido al mar de una fábrica textil. Con una muestra controlada averiguan que esta concentración sigue la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^4 + x^3 - x \cdot e^{-x^2}}}{x-2}$, en mg por cada 1000 mL y x en años. Utiliza GeoGebra para obtener el dominio y las asíntotas de la función.

- Por tratarse de una función con un radical, para hallar el dominio ayúdate del comando *Raíces*.
- Si introducimos f en Entrada podemos ver su gráfica, así como la asíntota vertical. ¿Cuál es? Para comprobarlo si la asíntota es $x = a$, escribimos $f(a)$, y si no devuelve ningún valor, se trata de una asíntota.
- Al alejarnos, observamos que puede haber una asíntota oblicua $y = ax + b$. Para hallar a, representamos $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ y para obtener b, representamos $h(x) = f(x) - ax$, y vemos hacia qué valores tienden en cada caso. Si no se aprecia bien, hallamos el valor de h para x muy grande (por ejemplo $h(9\,999\,999)$).
- ¿Tiene sentido estudiar la concentración en todo el dominio de la función? ¿Qué indica la asíntota oblicua?