1 NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Reparto en las elecciones

Cuando un grupo de amigos habla sobre sus planes para un fin de semana, suelen surgir diferentes ideas. Para decidir cuál de ellas elegir, pueden realizar una votación. Así, cada uno vota una opción y gana la que tenga más apoyos. Pero, puede que no sea suficiente con tener *la mitad más un voto*. Se podría decidir que un plan solo se lleva a cabo si consigue tres quintos, cuatro séptimos o cualquier otra fracción de los votos, que se fije previamente.

Habrás visto en los medios de comunicación que situaciones como esta se presentan en las elecciones, donde el reparto de escaños depende de la parte de votos que consigue cada partido.

Comienza el recorrido

1 **Resuelve estas operaciones.**

a) $-(23 - 28) : 5 + (-4) \cdot (10 - 8)$

b) $5 - \sqrt{81} \cdot (-4) + 3 \cdot (-2)^3 - 6$

2 **Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de estos números:**

a) 36 y 48

b) 16 y 49

c) 36, 40 y 45

d) 90, 150 y 250

3 **Comprueba que se puede repartir exactamente una unidad en estas tres partes: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$**

Escribe otra manera de repartir la unidad en tres partes distintas. Después, reflexiona si se puede repartir con cuatro fracciones cuyo numerador sea 1 y con diferentes denominadores.

Ruta de aprendizaje

1. Fracciones
2. Operaciones con fracciones
3. Fracciones y números decimales
4. Conjuntos numéricos
5. Aproximaciones y errores

Aprende +

Representación gráfica de números reales

PRODUCTO FINAL

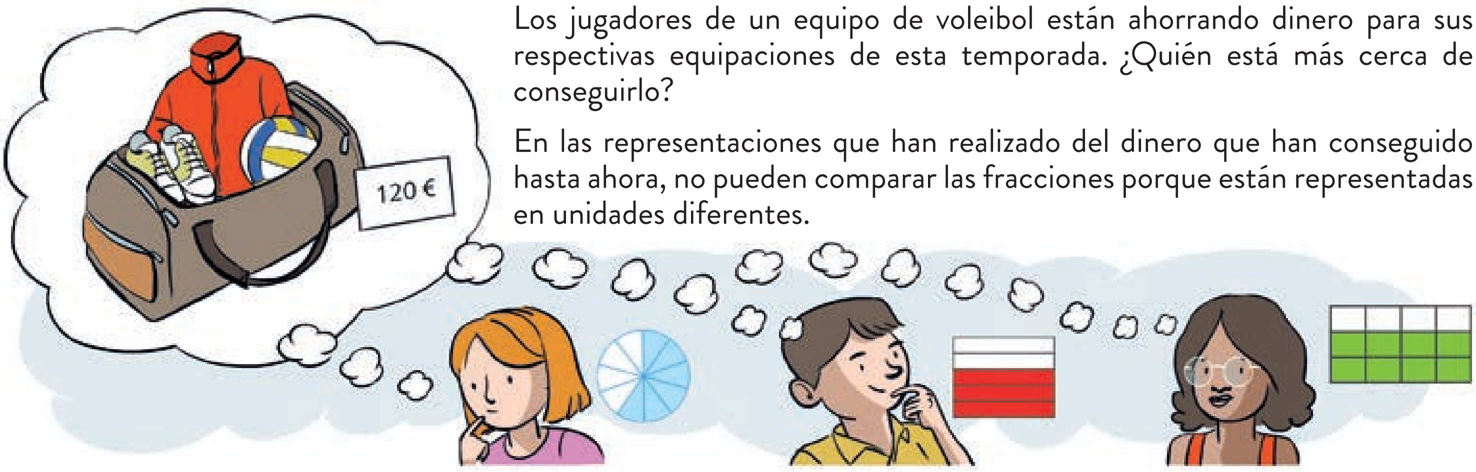
¿Cuánto significa un voto?

Investigarás como se asignan los escaños en un país democrático según los votos obtenidos por cada fuerza política, y reflejarás los resultados en una **presentación digital**.

1 Fracciones

Los jugadores de un equipo de voleibol están ahorrando dinero para sus respectivas equipaciones de esta temporada. ¿Quién está más cerca de conseguirlo?

En las representaciones que han realizado del dinero que han conseguido hasta ahora, no pueden comparar las fracciones porque están representadas en unidades diferentes.



Para poder compararlas, cada uno elige una estrategia diferente.

- Olaia amplifica para obtener las **fracciones equivalentes** con denominador común, hallando previamente el m.c.m. (10, 5, 12) = 60.

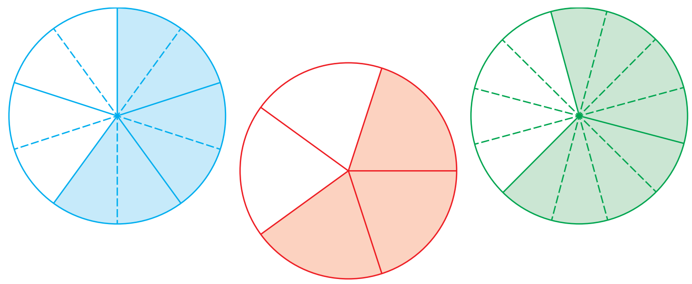
Olaia: $\frac{6}{10} \xrightarrow[\cdot 6]{\cdot 6} \frac{36}{60}$ Hugo: $\frac{3}{5} \xrightarrow[\cdot 12]{\cdot 12} \frac{36}{60}$ Julia: $\frac{8}{12} \xrightarrow[\cdot 5]{\cdot 5} \frac{40}{60}$

- Hugo simplifica hasta obtener la **fracción irreducible** en cada caso:

Olaia: $\frac{6}{10} \xrightarrow[:2]{:2} \frac{3}{5}$

Hugo: $\frac{3}{5}$

Julia: $\frac{8}{12} \xrightarrow[:4]{:4} \frac{2}{3}$



- Julia calcula qué parte de los 120 € que necesitan ha conseguido cada uno, calculando primero, cuánto dinero representa cada una de las partes iguales y, después, multiplicando por el número de partes que se toman:

Olaia: $\frac{6}{10}$ de $120 = 6 \cdot \frac{120}{10} = 6 \cdot 12 = 72$ €

Hugo: $\frac{3}{5}$ de $120 = 3 \cdot \frac{120}{5} = 3 \cdot 24 = 72$ €

Julia: $\frac{8}{12}$ de $120 = 8 \cdot \frac{120}{12} = 8 \cdot 10 = 80$ €

Tras comparar sus cálculos, deciden que Olaia y Hugo han ahorrado la misma cantidad, y que Julia es la que está más cerca de lograr su objetivo.

- Una **fracción** es un cociente indicado de dos números enteros, $\frac{a}{b}$, llamados numerador, a, y denominador, b, siendo siempre $b \neq 0$.
- Dos **fracciones** son **equivalentes** si representan la misma cantidad.
- Una **fracción** es **irreducible** si no se puede simplificar más, esto sucede si el numerador y el denominador son primos entre sí.

Recuerda

Si dos fracciones son equivalentes, los resultados de multiplicar el numerador de una por el denominador de la otra, y viceversa, son iguales.

Presta atención

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Actividades

1 Clasifica las siguientes fracciones según sean mayores, menores o iguales a la unidad.

$$\frac{7}{10} \quad \frac{27}{8} \quad \frac{97}{97} \quad \frac{105}{106} \quad \frac{43}{15}$$

Para aquellas que sean mayores que la unidad, exprésalas como la suma de un número natural y una fracción propia.

2 Encuentra dos parejas de fracciones equivalentes.

$$\frac{3}{11} \quad \frac{15}{33} \quad \frac{35}{65} \quad \frac{25}{55} \quad \frac{14}{26} \quad \frac{24}{36}$$

3 Halla el valor de *x* en estas fracciones para que sean equivalentes.

a) $\frac{x}{75} = \frac{14}{30}$ **c)** $\frac{28}{x} = \frac{12}{27}$

b) $\frac{20}{52} = \frac{15}{x}$ **d)** $\frac{33}{18} = \frac{x}{60}$

4 Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones, reduciéndolas previamente a común denominador.

a) $\frac{7}{10} \quad \frac{11}{15} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{31}{45} \quad \frac{23}{30}$

b) $-\frac{5}{12} \quad \frac{-11}{18} \quad \frac{-7}{9} \quad -\frac{19}{36} \quad \frac{7}{-12}$

c) $\frac{-7}{12} \quad \frac{3}{4} \quad -\frac{3}{5} \quad \frac{13}{15} \quad \frac{17}{20}$

Ejercicio resuelto

5 Determina la fracción irreducible de $\frac{48}{72}$.

Solución

Hallamos el máximo común divisor del numerador y el denominador:

$$\left.\begin{aligned} 48 &= 2^4 \cdot 3 \\ 72 &= 2^3 \cdot 3^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{m.c.d. } (48,72) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

Simplificamos la fracción:

$$\frac{48}{72} \xrightarrow[:24]{:24} \frac{2}{3}$$

6 Calcula la fracción irreducible correspondiente a cada una de las siguientes.

a) $\frac{105}{63}$ **c)** $\frac{-504}{-207}$

b) $\frac{125}{-625}$ **d)** $\frac{-81}{729}$

7 Ordena de mayor a menor estas fracciones sin reducirlas a común denominador.

a) $\frac{-9}{11} \quad -\frac{9}{7} \quad \frac{-9}{14} \quad \frac{-9}{4} \quad -\frac{9}{19}$

b) $\frac{5}{3} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{-5}{3} \quad \frac{5}{5} \quad -\frac{5}{9}$

c) $\frac{6}{7} \quad \frac{16}{17} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{11}{12} \quad \frac{23}{24}$

8 Calcula las siguientes cantidades.

a) $\frac{5}{6}$ de 240 kg **c)** $\frac{8}{8}$ de 240 L

b) $\frac{13}{12}$ de 240 € **d)** $\frac{3}{5}$ de 240 m

Ejercicio resuelto

9 Averigua cuál es el valor total si $\frac{5}{6}$ son 100 €.

Solución

Calculamos lo que $\frac{1}{6}$ valdría:

$100 : 5 = 20$ €

Hallamos lo que vale $\frac{6}{6}$, y tenemos que el total es: $6 \cdot 20 = 120$ €

10 Averigua cuál es el valor total sabiendo que:

a) $\frac{7}{8}$ son 168 g **c)** $\frac{4}{7}$ son 168 m^2

b) $\frac{14}{11}$ son 168 € **d)** $\frac{6}{6}$ son 168 min

11 Por la mañana, Raúl vende $\frac{7}{12}$ de los melocotones que tiene en su frutería. Por la tarde, $\frac{3}{5}$ de los que quedaban. Represéntalo gráficamente. Si le quedan 8 melocotones, ¿cuántos melocotones tenía?

+ Competentes

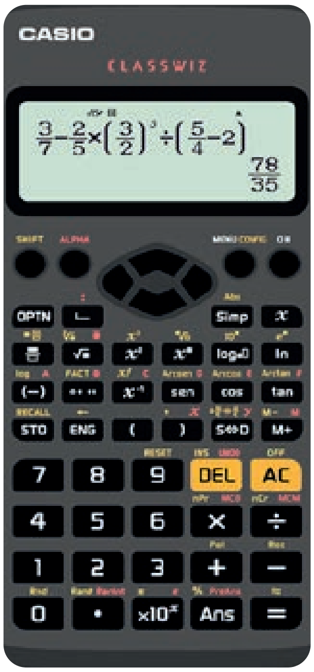
12 ¿De cuántas formas distintas puedes repartir 12 en dos partes no necesariamente iguales? Expresa cada parte como fracción y simplifica.

a) ¿En qué casos se puede simplificar y en qué casos no?

b) ¿Existe relación entre el 12 y esos números?

Con la calculadora

26mt0s3001



2 Operaciones con fracciones

Alba, Daniela y Juan tienen que resolver esta operación combinada:

$$\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3:\left(\frac{5}{4}-2\right)$$

Al calcular el resultado, cada uno ha obtenido una respuesta distinta: $\frac{156}{70}$, $\frac{78}{35}$ y $\frac{39}{20}$, respectivamente.

Revisamos las operaciones paso a paso:

$$\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3:\left(\frac{5}{4}-2\right)=\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3:\left(\frac{5}{4}-\frac{8}{4}\right)=$$

1. Paréntesis

Para restar, reducimos a común denominador y después, restamos los numeradores.

$$=\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3:\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\cdot\frac{3^3}{2^3}:\left(-\frac{3}{4}\right)=$$

2. Potencias

Elevamos el numerador y el denominador al exponente de la potencia.

$$=\frac{3}{7}-\frac{2\cdot 27}{5\cdot 8}:\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{7}-\frac{27}{5\cdot 4}:\left(-\frac{3}{4}\right)=$$

3. Multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha)

Multiplicamos los numeradores y los denominadores, simplificando si es posible.

$$=\frac{3}{7}-\frac{27}{20}:\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{7}-\left(-\frac{27\cdot 4}{20\cdot 3}\right)=\frac{3}{7}-\left(-\frac{9}{5}\right)=\frac{3}{7}+\frac{9}{5}=$$

Dividimos, multiplicando la primera fracción por la inversa de la segunda, simplificando si es posible.

$$=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 5}+\frac{9\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{15}{35}+\frac{63}{35}=\frac{78}{35}$$

4. Sumas y restas (de izquierda a derecha)

Para sumar, reducimos a común denominador y sumamos los numeradores.

Solo Daniela ha obtenido este resultado. Al revisar las operaciones, comprueban que Alba se ha olvidado de simplificar en algún paso y Juan cometió algún error al aplicar la **jerarquía de las operaciones**.

Al resolver operaciones combinadas con fracciones respetamos la **jerarquía de las operaciones**.

Consiste en realizarlas siguiendo este orden:

1. Paréntesis
2. Potencias
3. Multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha)
4. Sumas y restas (de izquierda a derecha)

Lenguaje matemático

Dos **fracciones** son **inversas** si su producto es la unidad.

$\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ son inversas pues:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$$

Actividades

13 Calcula y simplifica.

a) $-\dfrac{3}{4}+2+\dfrac{2}{6}-\dfrac{5}{8}$ **c)** $\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{5}{6}\right)-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}\right)$

b) $\dfrac{7}{12}-\left(3-\dfrac{7}{2}\right)$ **d)** $1-\left(\dfrac{5}{7}-\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{5}\right)\right)$

Presta atención

Siempre que sea posible, es preferible simplificar antes de operar.

Ejercicio resuelto

14 Simplifica y opera.

a) $\dfrac{77}{132}-\dfrac{70}{84}+\dfrac{45}{72}$ **b)** $\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{4}{9}$

Solución

a) $\dfrac{77}{132}=\dfrac{7}{12}$ $\dfrac{70}{84}=\dfrac{5}{6}$ $\dfrac{45}{72}=\dfrac{5}{8}$

$$\dfrac{7}{12}-\dfrac{5}{6}+\dfrac{5}{8}=\dfrac{14}{24}-\dfrac{20}{24}+\dfrac{15}{24}=$$
$$=\dfrac{9}{24}=\dfrac{3}{8}$$

b) $\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{3\cdot 4}{10\cdot 9}=\dfrac{3\cdot 2^2}{2\cdot 5\cdot 3^2}=\dfrac{2}{5\cdot 3}=\dfrac{2}{15}$

15 Opera simplificando previamente.

a) $\dfrac{40}{60}-\dfrac{50}{125}+\dfrac{35}{70}$

b) $\dfrac{110}{132}-\dfrac{45}{60}-\dfrac{27}{18}$

c) $\dfrac{50}{100}+\dfrac{15}{25}+\dfrac{18}{8}$

16 Simplifica y resuelve estas operaciones.

a) $\dfrac{9}{10}\cdot\left(-\dfrac{7}{9}\right)$ **c)** $\left(-\dfrac{5}{6}\right):\left(-\dfrac{10}{3}\right)$

b) $\dfrac{7}{20}\cdot(-5)$ **d)** $-\dfrac{12}{21}:\dfrac{9}{14}$

17 Halla el resultado de las siguientes operaciones y, si es posible, simplifica.

a) $\dfrac{10}{3}:\left(\dfrac{-1}{4}\right)\cdot\left(-\dfrac{6}{5}\right)$ **c)** $\dfrac{-6}{5}:\left(-\dfrac{2}{3}\right):\dfrac{2}{5}$

b) $\dfrac{10}{3}:\left(\left(-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(-\dfrac{6}{5}\right)\right)$ **d)** $\dfrac{-6}{5}:\left(\left(\dfrac{-2}{3}\right):\dfrac{2}{5}\right)$

18 Opera y simplifica.

a) $\dfrac{7}{4}+\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{8}$

b) $\dfrac{-2}{5}+\dfrac{1}{3}:\dfrac{3}{2}:\dfrac{5}{6}$

c) $\dfrac{2}{9}-\dfrac{5}{9}:\left(\dfrac{7}{8}-1\right)$

19 Averigua qué error se ha cometido al realizar esta operación:

$$\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^3:\left(\dfrac{5}{4}-2\right)=-\dfrac{9}{2}$$

20 Resuelve, paso a paso, teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones.

a) $\dfrac{7}{9}-\dfrac{2}{9}:\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{5}{3}-3\right)$

b) $\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{7}{6}-\dfrac{3}{4}:\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$

c) $\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{6}{7}-\left(\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{7}{2}:\dfrac{2}{3}\right)$

d) $-\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{12}:\dfrac{4}{5}:\left(3-\dfrac{5}{2}\right)^4$

21 En el programa de desayunos saludables de un centro escolar han sobrado 7 litros y medio de leche. Cada ración por alumno es de dos quintos de litro.

a) ¿Cuántas raciones enteras se pueden obtener?

b) ¿Queda alguna ración incompleta?

+ Competentes

22 En un ayuntamiento se realiza una votación y se reparten los escaños de este modo: se asignan la mitad de los escaños al partido A, un tercio al partido B y un noveno al partido C.

Analiza, y explica, si el reparto se ha hecho de forma correcta.

3 Fracciones y números decimales

Podemos expresar cualquier fracción como un número decimal.

- Si el numerador es múltiplo del denominador, el resultado al dividirlos es un **número entero**. Por ejemplo: $\frac{36}{12} = \frac{3}{1} = 3$
- Si el denominador de la fracción irreducible solo contiene los factores primos 2 o 5, la división llega a tener resto cero y el resultado al dividirlos es un **número decimal exacto**. Por ejemplo: $\frac{219}{150} = \frac{73}{50} = \frac{73}{2 \cdot 5^2} = 1,46$
- Si el denominador de la fracción irreducible no contiene en su descomposición los factores primos 2 y 5, la división no termina y el resultado es un **número decimal periódico puro**. Por ejemplo:
  $\frac{235}{165} = \frac{47}{33} = \frac{47}{3 \cdot 11} = 1,4242... = 1,\widehat{42}$
- Si el denominador de la fracción irreducible contiene en su descomposición otros factores primos además del 2 o del 5, la división tampoco termina y el resultado es un **número decimal periódico mixto**. Por ejemplo:
  $\frac{245}{84} = \frac{35}{12} = \frac{35}{2^2 \cdot 3} = 2,91666... = 2,91\widehat{6}$

El número obtenido al dividir el numerador por el denominador de una fracción puede ser un **número entero** o un **número decimal exacto, periódico puro** o **periódico mixto**.

Lenguaje matemático

Para escribir de forma abreviada un número decimal periódico escribimos un arco sobre las cifras que se repiten indefinidamente.

Parte entera — $2,91\widehat{6}$ — Parte decimal

Anteperíodo — Período

También podemos encontrar qué fracción corresponde a un número decimal.

- Si el número decimal es exacto, lo multiplicamos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya y despejamos.

$$n = 1,46$$
$$100n = 146 \rightarrow n = \frac{146}{100} = \frac{73}{50}$$

- Si el número decimal es periódico puro, lo multiplicamos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el período, le restamos dicho número y despejamos.

$$n = 1,4242...$$
$$\begin{array}{rl} 100n = & 142,42424... \\ -\quad n = & 1,42424... \\ \hline 99n = & 141 \rightarrow n = \frac{141}{99} = \frac{47}{33} \end{array}$$

- Si el número decimal es periódico mixto, lo multiplicamos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tengan el anteperíodo y el período juntos, le restamos el número multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo y despejamos.

$$n = 2,9166...$$
$$\begin{array}{rl} 1000n = & 2\,916,666... \\ -\quad 100n = & 291,666... \\ \hline 900n = & 2\,625 \rightarrow n = \frac{2\,625}{900} = \frac{35}{12} \end{array}$$

La fracción irreducible equivalente a un número decimal exacto o periódico se denomina **fracción generatriz**.

Presta atención

Para obtener la fracción generatriz tienes que simplificar el resultado siempre que sea posible.

Actividades

23 Indica de qué tipo son estos números decimales y exprésalos de forma abreviada.

a) 12,225225225... c) –4,37575
b) –3,227277777... d) 5,30123123123...

24 Copia en tu cuaderno esta tabla y complétala.

Número	–8,23		3,0606...	
Parte entera		2		–15
Parte decimal		4555...		
Período				6
Anteperíodo				31

25 Expresa estas fracciones como números decimales y clasifícalos según su parte decimal.

a) $\frac{16}{12}$ b) $\frac{-72}{30}$ c) $-\frac{80}{45}$ d) $\frac{35}{42}$

26 Sin efectuar la división, identifica el tipo de número decimal que corresponde a cada una de estas fracciones irreducibles.

a) $\frac{27}{8}$ b) $\frac{-35}{6}$ c) $\frac{23}{13}$ d) $\frac{32}{15}$

27 Sin dividir, indica qué fracción corresponde a cada número decimal.

a) $\frac{110}{75}$ I) 1,65
b) $\frac{99}{60}$ II) 1,4666...
c) $\frac{98}{66}$ III) 1,4848...

28 Clasifica el número decimal correspondiente a cada fracción sin resolver la división.

a) $-\frac{125}{90}$ b) $\frac{135}{60}$ c) $\frac{70}{63}$ d) $\frac{34}{60}$

29 Determina la fracción generatriz correspondiente a cada uno de estos números decimales.

a) 3,1 c) –32,5 e) 40,32
b) –2,35 d) –4,023 f) 71,296

30 Decide qué fracción corresponde a cada uno de los siguientes números decimales.

a) $7,\overset{\frown}{6}$ c) $3,\overset{\frown}{45}$ e) $-2,\overset{\frown}{108}$
b) $-5,\overset{\frown}{5}$ d) $-4,\overset{\frown}{142857}$ f) $3,\overset{\frown}{076923}$

31 Calcula la fracción generatriz que corresponde a cada uno de estos números decimales.

a) $0,2\overset{\frown}{7}$ c) $2,0\overset{\frown}{135}$ e) $-2,0\overset{\frown}{45}$
b) $-5,8\overset{\frown}{3}$ d) $1,22\overset{\frown}{3}$ f) $-11,27\overset{\frown}{12}$

Ejercicio resuelto

32 Expresa como fracciones los términos de esta operación: $0,75 - 0,5 \cdot (0,8\overset{\frown}{3} - 0,\overset{\frown}{3})$
Después, halla el resultado y muéstralo como número decimal.

26mt0s3002

Solución

Antes de operar, determinamos las fracciones generatrices.

$0,75 = \frac{3}{4}$ $\quad 0,8\overset{\frown}{3} = \frac{5}{6}$

$0,5 = \frac{1}{2}$ $\quad 0,\overset{\frown}{3} = \frac{1}{3}$

$$0,75 - 0,5 \cdot (0,8\overset{\frown}{3} - 0,\overset{\frown}{3}) =$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) =$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) =$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} =$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} =$$
$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

33 Expresa cada término como fracción y resuelve estas operaciones indicando el resultado como número decimal.

a) $0,\overset{\frown}{6} \cdot 1,5 - 0,75$

b) $1,\overset{\frown}{3} \cdot (0,75 - 0,8\overset{\frown}{3})$

c) $0,75 \cdot 1,\overset{\frown}{3} - 2 \cdot (0,\overset{\frown}{6} - 0,1\overset{\frown}{6})$

+ Competentes

34 Tras la votación a una propuesta municipal dividen el número de votos a favor por el total, obteniendo el cociente 0,63888... ¿Cuál es el menor número posible de votantes y de votos a favor? Señala otras posibles soluciones y cómo calcularlas.

Lenguaje matemático

Cada conjunto numérico se denota con una letra.

Naturales: $\mathbb{N}$ Enteros: $\mathbb{Z}$

Racionales: $\mathbb{Q}$ Irracionales: $\mathbb{I}$

Reales: $\mathbb{R}$

Lenguaje matemático

Hay números irracionales tan importantes que para expresarlos de forma sencilla recurrimos a letras como:

- $\pi = 3{,}14159265...$, que resulta al calcular la razón entre la longitud y el diámetro de una circunferencia.
- $e = 2{,}71828182...$, que veremos al trabajar con logaritmos y es la base de los logaritmos neperianos.
- ϕ (*phi*), conocido como el número de oro, cuyo valor es $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339...$ y que descubriremos más adelante en el bloque de Geometría.

Presta atención

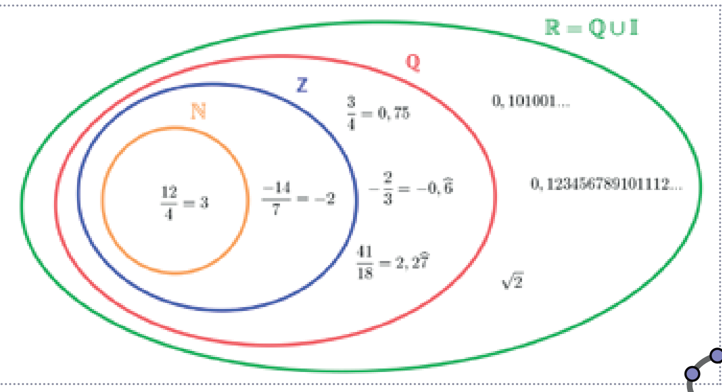
La representación gráfica de un intervalo puede ser:

- un segmento, si está limitado por ambos lados, es decir, si los dos extremos son números.
- una semirrecta, si solo un extremo es numérico y el otro lado no está limitado. Esto se indica con el símbolo del infinito, ∞, que significa que no tiene fin.

4 Conjuntos numéricos

Todos los números que Efrén ha estudiado se pueden expresar como una fracción. Todos ellos son **números racionales**.

Sin embargo, Efrén ha encontrado un número que no puede expresar como fracción: 0,123456789101112... No es un número natural, ni entero, ni decimal exacto, ni decimal periódico. Se trata de un **número irracional**.



26mt0s3003

Los números que se pueden expresar como fracción son **números racionales**. Por el contrario, los números con expresión decimal ilimitada y no periódica, que no se pueden expresar como fracción, son **números irracionales**.

El conjunto de todos los números, racionales e irracionales, es el conjunto de los **números reales**.

Intervalos

Efrén sabe que cada número tiene su lugar en la recta numérica, también los irracionales. Por ejemplo, el número 4,656656665... se encuentra entre los mayores que 4 y los menores que 5, es decir, pertenece al **intervalo** (4, 5).

$$4 < 4{,}656656665... < 5$$

Dependiendo de si los **extremos** forman parte del intervalo o no, se consideran distintos tipos de intervalo:

Abiertos / **Cerrado**

(a, b)	$(a, +\infty)$	$(-\infty, a)$	$[a, b]$
$a < x < b$	$x > a$	$x < a$	$a \leq x \leq b$
4 5 6 7 8	−2 −1 0 1 2	1 2 3 4 5	−2 −1 0 1 2 3
$(5, 7)$	$(-1, +\infty)$	$(-\infty, 4)$	$[-1, 2]$
$5 < x < 7$	$x > -1$	$x < 4$	$-1 \leq x \leq 2$

Semiabiertos o semicerrados

$(a, b]$	$[a, b)$	$[a, +\infty)$	$(-\infty, a]$
$a < x \leq b$	$a \leq x < b$	$a \leq x$	$x \leq a$
−3 −2 −1 0 1	−1 0 1 2 3	−4 −3 −2 −1 0	−2 −1 0 1 2
$(-2, 0]$	$[-1, 3)$	$[-3, +\infty)$	$(-\infty, 1]$
$-2 < x \leq 0$	$-1 \leq x < 3$	$x \geq -3$	$x \leq 1$

Un **intervalo** es un conjunto numérico que indica los números comprendidos entre dos valores llamados **extremos**.

Actividades

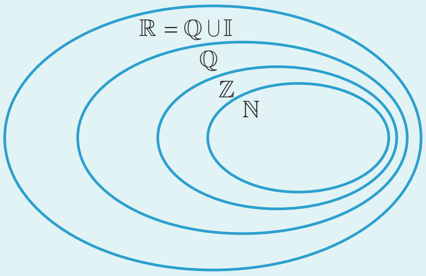
35 Indica cuáles de los siguientes números son irracionales.

a) 3,022022022…
b) 0,020220222…
c) –12,3545678…
d) –9,01011111…
e) –3,246810…
f) 4,75

36 Copia el siguiente diagrama escribiendo cada número en el conjunto numérico más adecuado.

5 –7 9,5 4,13 –2,32666… 0

$\frac{25}{6}$ –1,212212221… $\frac{8}{13}$ 5,21222324…



37 Indica el menor conjunto numérico al que pertenece cada uno de estos números.

a) $-\frac{15}{3}$
b) $3,\widehat{25}$
c) $\frac{21}{6}$
d) –7,332332…
e) 4,323323332…
f) $\frac{32}{16}$

38 Determina un número racional y otro irracional comprendidos entre:

a) $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{9}$
b) 3,09 y 3,1
c) 0,2 y $0,\widehat{20}$
d) 3,14 y π

39 Decide si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

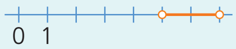
a) Todos los números naturales son enteros.
b) Todos los números enteros son naturales.
c) Un número racional no puede ser entero.

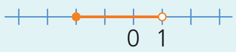
40 Representa en una recta los conjuntos de números que cumplen las siguientes condiciones y descríbelos mediante un intervalo.

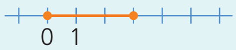
a) Comprendidos entre 3 y 5, ambos incluidos
b) Mayores que 3 y menores o iguales que 5
c) Estrictamente menores que 5
d) Mayores o iguales que 3
e) Comprendidos entre 3 y 5, sin incluir

41 Escribe como intervalos estos conjuntos numéricos e indica de qué tipo son.

a) 

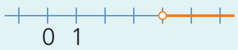
b) 

c) 

d) 

42 Escribe la desigualdad y la expresión en forma de intervalo que describe cada uno de estos conjuntos numéricos.

a) 

b) 

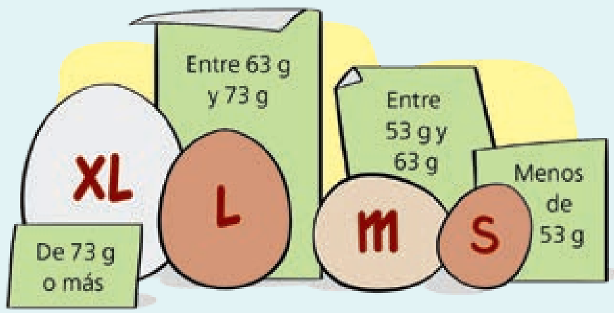
c) 

d) 

43 Representa los conjuntos de números que cumplen estas desigualdades en la recta numérica y descríbelos como intervalos indicando de qué tipo son.

a) $6 < x < 8$
b) $-1 < x \leq 5$
c) $x \leq 8$
d) $-7 \leq x < -3$
e) $x > 2$
f) $-2 \leq x \leq 0$

44 Representa con intervalos las categorías de los huevos según lo que pesan.

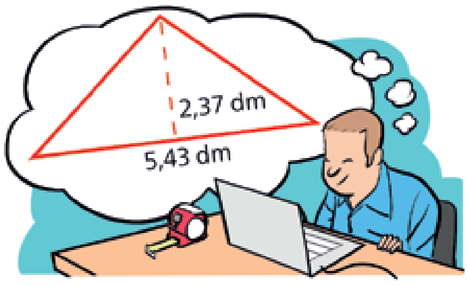


¿Qué tipo de intervalo necesitas utilizar en cada caso para que un huevo solo pueda encontrarse en uno de ellos?

+ Competentes

45 Si se hiciera un reparto proporcional atendiendo al número de votos obtenidos para hacer la asignación de escaños en un parlamento, ¿qué tipo de números se obtendrían en el cociente? Indica los distintos conjuntos numéricos.

5 Aproximaciones y errores



Alberto tiene un retal de chapa con forma triangular en su taller. Para añadirlo al inventario, lo mide hasta los milímetros. Sin embargo, la aplicación en la que almacena los datos solo permite introducir números con una cifra decimal, y por eso aproxima las dos medidas.

Aproximación por defecto	Valor real	Aproximación por exceso
5,4 dm	5,43 dm	5,5 dm
2,3 dm	2,37 dm	2,4 dm

Las **aproximaciones** de la longitud de la base y de la altura conservan dos cifras significativas, que dan información sobre su valor.

Presta atención

- 2,3 y 2 300 tienen dos cifras significativas.
- 2,03 y 2 030 tienen tres cifras significativas.

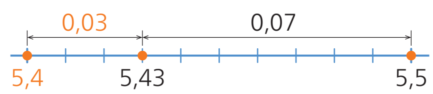
Aproximar un número es sustituirlo por otro con las cifras ajustadas a la precisión que se necesite. La **aproximación por defecto** es un valor menor que el valor real y la **aproximación por exceso** es un valor mayor.

Se denominan **cifras significativas** de un número aproximado a aquellas de cuya exactitud tenemos constancia y son relevantes para la medida.

Errores

¿Cuál de las dos aproximaciones debería elegir? Será mejor la que tenga menor diferencia con el valor real, es decir, menor **error absoluto**.

$$5{,}43\text{ dm}: \begin{cases} E_a = 5{,}43 - 5{,}4 = 0{,}03\text{ dm} \\ E_a = 5{,}5 - 5{,}43 = 0{,}07\text{ dm} \end{cases}$$



Alberto debería elegir la aproximación por **redondeo**.

Base: $5{,}43\text{ dm} \approx 5{,}4\text{ dm}$ Altura: $2{,}37\text{ dm} \approx 2{,}4\text{ dm}$

Las dos aproximaciones tienen el mismo error absoluto, 0,03 dm, pero la base es mayor que la altura. ¿Son entonces las dos igual de buenas? Para determinar la magnitud del error cometido, comparamos el error absoluto con el valor real, dividiéndolos para hallar el **error relativo**.

$$E_r = \frac{0{,}03}{5{,}43} = \frac{3}{543} = 0{,}00552... = 0{,}552...\ \%$$

$$E_r = \frac{0{,}03}{2{,}37} = \frac{3}{237} = 0{,}01266... = 1{,}266...\ \%$$

Es mejor aproximación la obtenida de la base, porque el error relativo es menor.

Recuerda

- Para **redondear** un número decimal a un orden determinado, se sustituyen por 0 las cifras de orden inferior y si la cifra siguiente a la que redondea es:
  - mayor o igual que 5, se suma una unidad a la cifra del orden que se está redondeando.
  - menor que 5, la cifra del orden que se está redondeando no varía.
- Para **truncar** un número decimal a un orden determinado, se eliminan las cifras de los órdenes inferiores a él.

- **Redondear** un número consiste en elegir la aproximación con menor error absoluto.
- El **error absoluto** es la diferencia en valor absoluto entre un valor real, x, y su aproximación, a. Se mide en las mismas unidades que el valor real: $E_a = |x - a|$
- El **error relativo** es el cociente que resulta al dividir el error absoluto por el valor absoluto del valor real. Se expresa en porcentaje: $E_r = \dfrac{E_a}{|x|}$

Actividades

46 Aproxima el número 3,6491 a las centésimas, décimas y unidades por defecto y por exceso. Decide en cada caso cuál de ellas se corresponde con la aproximación por redondeo.

47 Copia y completa en tu cuaderno para que las aproximaciones sean por redondeo.

a) $43{,}2\square3 \approx 43{,}24$ **c)** $12{,}30\square5 \approx 12{,}305$

b) $-35{,}\square71 \approx -35{,}2$ **d)** $9{,}\square75 \approx 10{,}0$

48 Redondea los siguientes números al orden que se indica y calcula el error absoluto cometido.

a) 25,3648 a las milésimas

b) –2,7365 a las décimas

49 Copia y completa esta tabla redondeando con el número de cifras significativas que se indica.

	1 cifra	2 cifras	3 cifras
4,527			
23,645			
61,9381			
–5,362			

50 Calcula el número decimal correspondiente a la fracción $\frac{26}{11}$ y responde.

a) Aproxima por redondeo con dos, tres y cuatro cifras significativas.

b) Calcula el error relativo en cada caso.

c) ¿Qué ocurre al aumentar el número de cifras significativas?

51 ¿Crees que se indica el precio real?

a) ¿Cuál podría ser el coste real del dispositivo? Contesta con un intervalo que contenga todas las posibles soluciones.

b) Copia y completa en tu cuaderno esta frase indicando las unidades: *El error absoluto cometido al redondear el precio es menor que…*

52 Para moverse por la ciudad, Eva se ha comprado una bicicleta por 1 843 €.

a) Halla el error absoluto y el relativo en cada caso.

b) Indica cuál es la aproximación más adecuada.

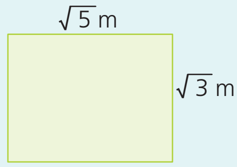
53 Un electricista tira un cable por la diagonal de una habitación rectangular de 8 m × 5 m. ¿Cuál es la longitud mínima que debe tener el cable? ¿Aproximarías por exceso o por defecto?

Aproxima en metros y en centímetros:

- con dos cifras significativas.
- con dos cifras decimales.

Determina el error relativo en cada caso y analiza los resultados. Decide cuál es la aproximación más precisa y cuál es más adecuada.

54 Halla cuánto mide la superficie de este rectángulo redondeando el resultado con dos cifras decimales.



- Aproximando cada una de las longitudes con una cifra decimal.
- Utilizando las longitudes exactas, sin aproximar.

¿Hay alguna diferencia? Calcúlala y exprésala como error relativo.

+ Competentes

55 En una pequeña localidad deciden repartir las 10 concejalías, entre los partidos elegidos de forma proporcional, de modo que:

- al partido A le corresponde la mitad.
- al partido B, la tercera parte.
- al partido C, la sexta parte.

¿Es posible? Realiza el reparto, redondeando los resultados y calcula el error relativo cometido.

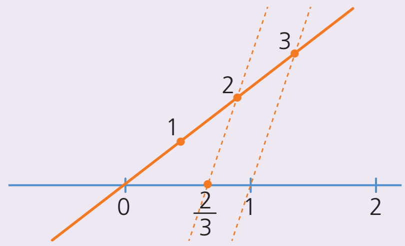
APRENDE +

Representación gráfica de números reales

Números racionales

Cualquier número racional se puede representar como fracción. Por eso, para representarlos de forma exacta sobre la recta, utilizamos el teorema de Tales. Así, para representar el número: $0,666... = 0,\widehat{6} = \dfrac{2}{3}$

1. Trazamos una recta auxiliar que corta a la recta numérica en el 0 y marcamos en ella tantas divisiones iguales como indique el denominador: 3
2. Dibujamos una recta que pase por la última división y por 1.
3. Trazamos una paralela a esta por la marca que indique el numerador: 2
4. El número racional se sitúa en el punto de intersección de esta paralela con la recta numérica.



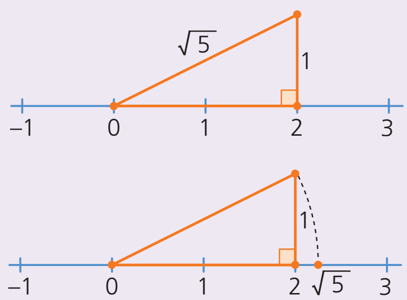
Números irracionales del tipo $\sqrt{n}$

Todas las raíces cuadradas no exactas de números naturales son números irracionales, es decir, no se pueden expresar como fracción. ¿Cómo los representamos entonces en la recta numérica?

Haremos uso del teorema de Pitágoras. Así, para representar el número $\sqrt{5}$, descomponemos el radicando como suma de dos cuadrados: $(\sqrt{5})^2 = 5 = 4 + 1 = 2^2 + 1^2$

Así, $\sqrt{5}$ unidades es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y 2 unidades.

1. Construimos un triángulo rectángulo con un cateto que mide 2 unidades sobre la recta numérica y otro, de longitud 1 unidad, sobre una recta perpendicular a ella.
2. Sabemos por el teorema de Pitágoras que la hipotenusa mide $\sqrt{5}$ unidades.
3. Con ayuda del compás, haciendo centro en 0, trasladamos la medida de la hipotenusa sobre la recta.



Actividades

56 **Representa gráficamente estos números.**

a) $\dfrac{4}{5}$ b) $\dfrac{3}{7}$ c) $\dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{4}{7}$

57 **Para representar gráficamente $\dfrac{7}{4}$:**

1. Averiguamos entre qué dos números enteros está:

$$1 = \frac{4}{4} < \frac{7}{4} < \frac{8}{4} = 2$$

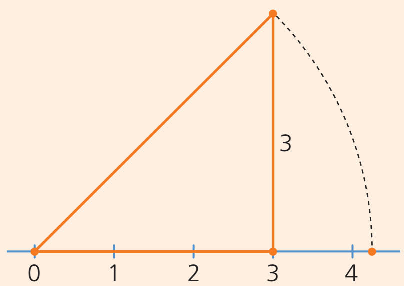
2. Lo descomponemos como suma: $\dfrac{7}{4} = 1 + \dfrac{3}{4}$
3. Representamos $\dfrac{3}{4}$ entre 1 y 2.

Aplica los mismos pasos para situar $\dfrac{7}{3}$, $\dfrac{12}{7}$ y $\dfrac{17}{5}$.

58 **Representa gráficamente.**

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{8}$ c) $\sqrt{10}$

59 **¿Qué número está representado en este dibujo?**



60 **Observa la representación gráfica de $\sqrt{5}$. ¿Cómo representarías $-\sqrt{5}$? Sitúa en la recta:**

a) $-\sqrt{8}$ b) $-\sqrt{13}$ c) $-\sqrt{20}$

¿Cuánto significa un voto?

Presentación digital

Los estados democráticos están organizados de manera que sus ciudadanos participan en la toma de decisiones colectivas. Estos eligen, mediante plebiscito, quiénes quieren que los represente para la toma de esas decisiones.

En los sistemas de participación a través de listas electorales, cada ciudadano o ciudadana mayor de edad emite un voto a favor de una de estas listas. Teniendo en cuenta todos los votos, se designan los representantes.

Sin embargo, ese reparto no es tan sencillo. ¿Cómo se hace? ¿Qué problemas hay que resolver?

Búsqueda de información y análisis

I Buscad y recopilad información sobre los distintos sistemas electorales.

- ¿Qué tipos de representación hay? ¿En qué se diferencian unos de otros? ¿Cuáles son los más utilizados?
- ¿Qué es un sistema de representación proporcional?

Organizad de forma clara toda la información que encontréis.

Elaboración

II Imaginad que en vuestro centro escolar se realiza una votación entre tres listas electorales para elegir, de entre ellas, a sus representantes de forma proporcional.

Después de realizar el escrutinio, se obtiene este reparto de los votos: Lista A, 72; Lista B, 48 y Lista C, 24

a) ¿Qué fracción de los votos ha recibido cada lista electoral?

b) Si tenemos que designar a 6 representantes, ¿cuántos deberíamos elegir de cada lista?

c) ¿Y si pudiéramos elegir uno más? Realizad el reparto para 7 representantes con esos mismos votos. ¿Cuál es el problema?

III ¿Cómo se llama y cómo funciona el método de asignación de representantes, escaños, en el Estado Español?

a) Aplicadlo para realizar los repartos de la actividad anterior, eligiendo 6 representantes o 7 representantes. ¿Coinciden los resultados?

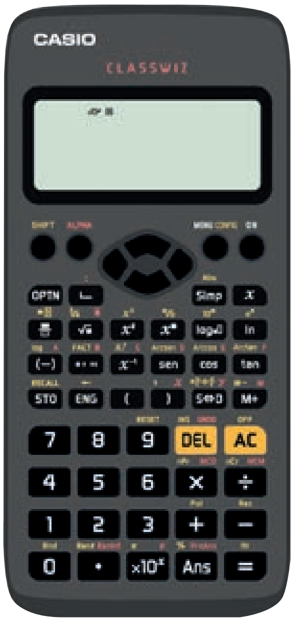
b) Aplicad este mismo sistema para repartir 7 escaños entre 5 listas que han recibido 240, 180, 144, 120 y 36 votos, respectivamente. ¿Estáis de acuerdo con el reparto?

Publicación y comunicación

IV Preparad una presentación digital que muestre:

- los tipos de sistemas electorales y sus diferencias.
- los sistemas de representación proporcional y los métodos más importantes.
- las dificultades que presenta el reparto proporcional de escaños en este tipo de sistemas electorales y las ventajas de cada uno.
- un ejemplo de votación en el que vosotros designéis el número de votos por partido.
  - Asignad los escaños según nuestro sistema electoral y siguiendo el sistema proporcional.
  - Comparad y comentad las diferencias entre ambos.

Investiga los números racionales



Insertar fracción.

SHIFT →

Insertar número mixto.

S⇔D

Expresar un resultado como fracción, como número decimal con período o como número decimal aproximado.

SHIFT → S⇔D

Pasar un resultado de fracción mayor que 1 a número mixto y viceversa.

ALPHA → √■

Escribir el período de un número.

SHIFT → ×10ˣ

Utilizar el número π.

Ans

Utilizar el resultado de la operación anterior.

61 **¿Tienen relación las cifras decimales de un número y el denominador de la fracción irreducible que le corresponde? ¿Cuántas partes decimales diferentes crees que se pueden obtener para un mismo denominador?**

Aventura una respuesta intentando explicar el porqué. Después, coge tu calculadora y confirma o refuta tu afirmación.

Antes de empezar, configura tu calculadora de modo que:

- no use notación científica:
  3: Formato número → 3: Normal → 2
- muestre el período:
  3: Dec periódico → 1: On
- exprese las fracciones mayores que la unidad como números mixtos:
  4: Result fracción → 1: ab/c

Ahora, sigue estos pasos para encontrar la respuesta.

1. Divide varios números naturales por 7. ¿Qué tipo de números decimales obtienes?
2. Ordena tus resultados completando en tu cuaderno una tabla similar a la siguiente y añade otros números de forma sistemática, que te ayuden a descubrir alguna relación.

Fracción	Número mixto	Número decimal	Parte entera	Período

3. Relaciona el número mixto con las cifras decimales de cada número. ¿Cuántas categorías diferentes puedes establecer? Descríbelas y enuméralas ordenadamente.
4. Averigua con la calculadora la fracción generatriz de un número decimal periódico puro utilizando un período de la tabla. ¿Qué denominador obtienes? Exprésala como número mixto. ¿Coincide con tu relación?
5. Revisa tu respuesta a la pregunta inicial y cotéjala con los resultados que has obtenido. ¿Coinciden? ¿Cuántas partes decimales diferentes se obtienen al dividir por 7? Generaliza.

62 **La fracción $\frac{22}{7}$, conocida como número de Arquímedes, es una aproximación racional de π. De hecho, Arquímedes es el responsable de estas aproximaciones por defecto y por exceso de π: $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$**

- Utiliza el valor de π que proporciona la calculadora para determinar el error absoluto y el error relativo en cada caso.
- ¿Cuál de ellas es mejor aproximación?

63 **Investiga el número 142 857 con esta secuencia de teclas:**

142 857 = Ans + 142 857 = = = = =

CONOCIMIENTOS BÁSICOS

Operaciones con fracciones

Opera: $\frac{3}{10} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} : \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$

Jerarquía de las operaciones → **Paréntesis** → **Potencias** → Multiplicaciones y divisiones → Sumas y restas

Hallamos el resultado teniendo en cuenta la jerarquía de operaciones, tanto dentro como fuera de los paréntesis.

$$\frac{3}{10} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} : \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = \frac{3}{10} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} : \frac{2^2}{3^2}\right) = \frac{3}{10} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} : \frac{4}{9}\right) = \frac{3}{10} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{9}{10}\right) =$$

$$= \frac{3}{10} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{6}{10} + \frac{9}{10}\right) = \frac{3}{10} - \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{10} = \frac{3}{10} - \frac{9}{8} = \frac{12}{40} - \frac{45}{40} = -\frac{33}{40}$$

¡Recuerda **simplificar** para obtener una **fracción equivalente** más sencilla!

Fracciones y números decimales

De fracción a número decimal → **Fracción irreducible** → **Descomposición del denominador en factores primos** →

- Si solo tiene los factores 2 o 5, es un **decimal exacto.**
- Si no contiene ni 2 ni 5, es un **decimal periódico puro.**
- Si contiene otros factores además de 2 o 5, es un **decimal periódico mixto.**

Clasifica estos números decimales y halla la fracción generatriz correspondiente.

a) 3,25

Es exacto.

Tantos ceros como cifras decimales haya

$100n = 325$

$n = \frac{325}{100} = \frac{13}{4}$

b) 5,3636...

Es periódico puro.

Tantos ceros como cifras tiene el período

$$\begin{aligned} 100n &= 536{,}36\ldots \\ n &= 5{,}36\ldots \\ \hline 99n &= 531 \end{aligned}$$

$n = \frac{531}{99} = \frac{59}{11}$

c) 2,31818...

Es periódico mixto.

Tantos ceros como cifras tienen el anteperíodo y el período juntos

Tantos ceros como cifras tiene el anteperíodo

$$\begin{aligned} 1000n &= 2318{,}18\ldots \\ 10n &= 23{,}18\ldots \\ \hline 990n &= 2\,295 \end{aligned}$$

$n = \frac{2\,295}{990} = \frac{51}{22}$

Aproximaciones y errores

Aproxima $\frac{24}{11}$ por redondeo con dos cifras significativas, y halla el error absoluto y el error relativo cometidos.

$$\frac{24}{11} = 2{,}1818\ldots \approx 2{,}2 \rightarrow \begin{cases} \text{Error absoluto: } E_a = |x - a| = \left|\frac{24}{11} - 2{,}2\right| = \left|\frac{24}{11} - \frac{11}{5}\right| = \frac{1}{55} \\ \text{Error relativo: } E_r = \frac{E_a}{|x|} = \frac{\frac{1}{55}}{\frac{24}{11}} = \frac{1}{120} = 0{,}008\widehat{3} \approx 0{,}83\,\% \end{cases}$$

ACTIVIDADES DE REPASO

Fracciones. Operaciones con fracciones

64 Clasifica estas fracciones según sean mayores, menores o iguales a la unidad.

$$\frac{37}{8} \qquad \frac{64}{64} \qquad \frac{12}{35} \qquad \frac{59}{13} \qquad \frac{24}{25}$$

Para aquellas que sean mayores que la unidad, exprésalas como suma de un número natural y una fracción propia.

65 Enrique dice que su compañero ha resuelto mal estos ejercicios. ¿Por qué sabe que no están bien, si no ha realizado las operaciones?

$$\frac{6}{5} \text{ de } 1200 \text{ €} = 1000 \text{ €}$$

$$\frac{7}{15} \text{ de } 2100 \text{ €} = 1120 \text{ €}$$

66 ¿Cuáles son fracciones equivalentes?

$$\frac{-3}{4} \qquad \frac{6}{8} \qquad \frac{-3}{-4} \qquad -\frac{-3}{4} \qquad \frac{12}{-16}$$

67 Ordena estas fracciones de mayor a menor.

a) $\frac{11}{7}, \frac{11}{-6}, \frac{11}{15}, \frac{-11}{4}, \frac{-11}{-13}$

b) $-\frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{-5}{3}, \frac{11}{6}, \frac{-2}{-3}$

68 Efectúa estas divisiones.

Ⓘ $\frac{3}{4} : \frac{3}{6}$ y $\frac{3}{6} : \frac{3}{4}$ Ⓘⓘ $\frac{2}{5} : \frac{3}{5}$ y $\frac{3}{5} : \frac{2}{5}$

a) ¿Es posible decidir cuál de las dos fracciones que intervienen en la división es mayor, atendiendo al valor del cociente?

b) ¿Y si ambas fuesen negativas?

c) ¿Y si tuvieran distinto signo?

Establece una regla para comparar fracciones atendiendo a esta propiedad.

69 Resuelve y simplifica.

a) $\left(\frac{6}{7} + 2\right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} - 3 : \frac{3}{2}$

b) $1 + \frac{3}{5} : \frac{2}{15} \cdot \left(\frac{5}{3} - 2\right)$

c) $3 \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} : \left(\frac{-3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^3$

d) $\frac{6}{5} : \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} : \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{2}\right)^3 \cdot \frac{7}{6} - \frac{7}{10}$

70 Indica el resultado de forma simplificada.

a) $\frac{5}{3} : \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{6}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$

b) $\frac{5}{3} : \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)\right)$

71 Copia la operación $\frac{13}{12} - \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{21}{20}$, y añade los paréntesis imprescindibles para obtener cada uno de los resultados que se indican.

a) 1 **b)** $\frac{43}{30}$ **c)** $-\frac{11}{80}$ **d)** $-\frac{101}{120}$ **e)** $-\frac{2}{3}$

Fracciones y números decimales

72 Razona qué tipo de número decimal corresponde a cada una de las siguientes fracciones sin efectuar la división.

a) $\frac{63}{25}$ **b)** $-\frac{41}{33}$ **c)** $\frac{-81}{75}$ **d)** $\frac{96}{56}$

73 Averigua qué cifra ocupa la posición 35.ª en la parte decimal de la expresión como número decimal de la fracción $\frac{5}{7}$.

74 Determina la fracción generatriz que corresponde a cada uno de estos números.

a) $-2{,}32$ **c)** $-2{,}3\widehat{2}$ **e)** $0{,}\widehat{93}$

b) $-2{,}\widehat{32}$ **d)** $1{,}32\widehat{6}$ **f)** $5{,}625$

75 Expresa los números decimales como fracciones y calcula.

a) $\left(0{,}5 + 0{,}\widehat{3}\right) : 1{,}\widehat{6}$ **c)** $3{,}\widehat{6} \cdot 2{,}\widehat{27} - 2{,}7$

b) $0{,}4\widehat{6} + 1{,}\widehat{3} - 0{,}6$ **d)** $4{,}\widehat{5} \cdot 3{,}\widehat{21} : 1{,}2$

76 Calcula la fracción generatriz que corresponde a estos números decimales:

3,999... 5,7999... 17,23999...

Fíjate en los resultados y escribe en tu cuaderno lo que observes.

77 Realiza estas operaciones y expresa el resultado como fracción irreducible.

a) $2{,}\widehat{6} + 3{,}\widehat{12} + 1{,}\widehat{21}$

b) $0{,}2 \cdot \left(2{,}\widehat{45} + 2{,}\widehat{54}\right)$

¿Qué observas?

Conjuntos numéricos

78 Escribe un número que satisfaga cada condición.

a) Entero no natural y que no sea negativo
b) Real que no sea irracional
c) Racional que no sea entero
d) Decimal que no sea racional

79 Representa estos conjuntos de números en la recta numérica y escríbelos como intervalos indicando de qué tipo son.

a) Menores o iguales que −2
b) Mayores o iguales que 1 y menores que 6
c) Comprendidos entre 0 y 5, excluidos
d) Estrictamente mayores que 2

80 Describe los intervalos representados como desigualdad y como intervalo. Indica de qué tipo de intervalos se trata.

a) 

c) 

b) 

d) 

81 Escribe un número racional y otro irracional que estén comprendidos en cada uno de estos intervalos.

a) $\left(\frac{7}{13}, \frac{8}{13}\right)$ **b)** $(2{,}19; 2{,}2)$

Aproximaciones y errores

82 Escribe la mejor aproximación de estos números por defecto y por exceso al orden que se indica.

a) A las milésimas $-3{,}\widehat{35}$

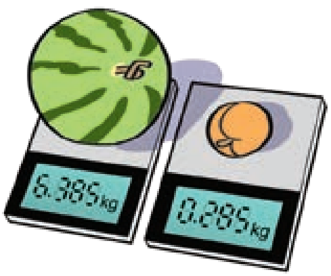
b) A las décimas $\frac{16}{6}$

c) A las diezmilésimas $2{,}5\widehat{27}$

83 Halla la aproximación por redondeo a las décimas y a las centésimas de $2{,}4\widehat{6}$, y calcula el error absoluto cometido en cada caso.

84 Aproxima lo que pesa cada fruta y determina el error relativo cometido:

a) redondeando a las centésimas.
b) redondeando con dos cifras significativas.



Problemas con números racionales

85 Un establecimiento elabora limonada mezclando 3 partes de agua con 1 de limón. Si para una jarra de 6 vasos se han empleado 135 cL de agua, ¿qué capacidad tiene cada vaso?

86 En el equipo de atletismo de un centro escolar, este curso se han inscrito más de 50 alumnos.

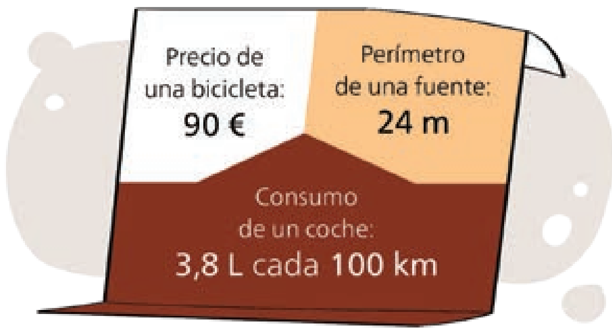
¿Cómo puedes averiguar el menor número de alumnos inscritos posible?

87 Un perfumista ha envasado tres cuartos de litro de esencia de jazmín en frascos de 5 mL. ¿Cuántos frascos ha necesitado?

88 Con una garrafa de 8 litros de aceite ecológico se han rellenado 17 botellas de un tercio de litro. ¿Cuántos vasos de un cuarto de litro se pueden llenar con lo que queda en la garrafa?

89 Para reducir el paro, se diseñó un innovador plan de industrialización. En las dos primeras fases se empleó a un tercio y a un cuarto del total de parados. En una tercera fase se contratan a dos tercios de los restantes, quedando 1 725 parados. ¿A cuántas personas contrataron en la primera fase?

90 Fíjate en estas aproximaciones por redondeo.



¿Es posible en algún caso determinar el valor real? Indica entre qué valores se encuentra y di una cota (valor máximo) del error absoluto que se puede haber cometido en cada caso.

COMPRENSIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cuando los números se vuelven irracionales

ÁLVARO.—Fíjate, Lucía, cada curso que avanzamos conocemos un nuevo conjunto numérico.

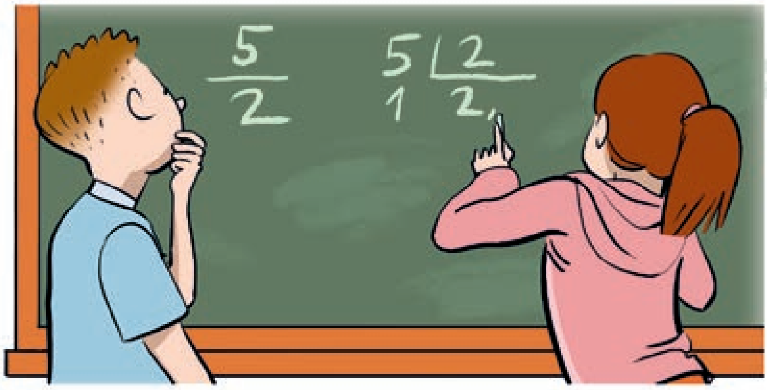
LUCÍA.—¡Es verdad! ¿Te acuerdas cuando descubrimos el conjunto de los números enteros en 1.º de ESO?

ÁLVARO.—Sí, me encantó esa unidad. Y el año pasado aprendimos mucho sobre fracciones y números decimales. Recuerdo que había números decimales exactos, periódicos puros y periódicos mixtos.

LUCÍA.—Y este año descubrimos que aún hay más números. ¡Qué curiosas son las matemáticas!

ÁLVARO.—Ya ves, nunca se me había ocurrido pensar en un número decimal que no sea ni exacto, ni periódico.

LUCÍA.—A mí tampoco. ¿Cómo íbamos a imaginar que existen números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas, que no vienen de ninguna fracción?



ÁLVARO.—Ya, pero yo no entiendo por qué un número con infinitas cifras decimales no periódicas no puede ser racional. ¿Cómo es posible que no se pueda expresar como una fracción?

LUCÍA.—Eso es lo que nos han explicado son los números irracionales. ¿Qué te parece si intentamos demostrarlo?

ÁLVARO.—¿Demostrar qué?

LUCÍA.—Pues que un número con infinitas cifras decimales no periódicas no se puede expresar como una fracción.

LUCÍA.—En primer lugar, vamos a expresar cada una de estas fracciones como un número decimal. Pero, Álvaro, ten en cuenta que no podemos utilizar la calculadora, tenemos que dividir a mano para hallar el cociente y el resto.

$$\frac{8}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{72}{3} \quad \frac{16}{3} \quad \frac{35}{3} \quad \frac{17}{6}$$

ÁLVARO.—¡Genial! Así, podemos analizar cómo son sus expresiones decimales.

Reto. Expresad las fracciones anteriores como un número decimal sin utilizar la calculadora.

LUCÍA.—¡Cuánta variedad de números hemos obtenido!

ÁLVARO.—Sí, aunque tenemos que probar con más fracciones para poder ver un patrón.

LUCÍA.—¿Qué te parece si escribimos fracciones que tengan denominadores diferentes a los que ya hemos analizado y calculamos sus expresiones decimales?

ÁLVARO.—Es muy buena idea, pero tenemos que seguir un orden si no, esto se vuelve un caos.

Reto. Escribid fracciones con diferentes denominadores a los del reto anterior y expresadlas como números decimales.

LUCÍA.—Y, por último, para demostrar que un número con infinitas cifras decimales no periódicas no se puede expresar como una fracción, tenemos que generalizar lo que hemos estado observando en los retos anteriores, esto es, que la expresión decimal de una fracción es siempre un número entero, decimal exacto o periódico.

ÁLVARO.—Sí, fíjate que ambas afirmaciones son equivalentes, si demostramos una, habremos demostrado la otra.

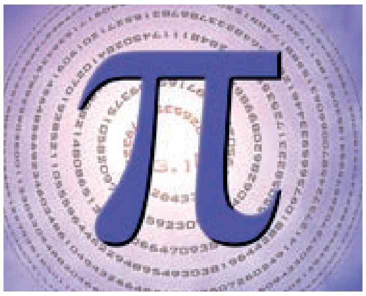
LUCÍA.—¡Exacto! Y así, habremos probado que los números irracionales no se pueden expresar como una fracción.

Reto. Observad cómo son los restos que habéis obtenido al calcular la expresión decimal de cada fracción. ¿Detectáis algún patrón? Justificad que la generalización es válida para cualquier numerador y denominador que escojáis.

MATEMÁTICAS VIVAS

El número pi, una cifra para casi todo

Existen ciertos días **marcados en el calendario** en referencia a pi. [...]



Cada año, el día de aproximación por regla al número pi es el 14 de marzo y la razón es muy sencilla: es el **día 14 del tercer mes**, 3,14, las primeras tres cifras significativas del número pi. Se conoce a nivel mundial como "El Día de Pi" y, en concreto, llega a su culmen a la 1:59 AM, pues se hace referencia también a los siguientes decimales, 3,14159. La celebración fue una iniciativa del físico Larry Shaw, trabajador en el Exploratorium, el museo de ciencia de San Francisco, California, en 1988.

Pero no es el único, además de este "día principal", existen **otros de aproximación algo más indirecta**. Estos son el 22 de julio, pues 22 entre 7 es la fracción que da pi como resultado; el 26 de abril, pues es la fecha en que la Tierra completa dos unidades astronómicas (la longitud total de la órbita entre la longitud recorrida hasta ese día es igual a pi), y finalmente, el 10 de noviembre, que es la correspondencia con el número 314 en el calendario gregoriano.

FUENTE: **Noelia FREIRE**
nationalgeographic.com.es, 13 de marzo de 2025

Lee el texto y responde.

a) ¿Es correcta la afirmación: *22 entre 7 es la fracción que da pi como resultado*? ¿Cuál es el error relativo cometido?

b) Busca información sobre la longitud de la órbita terrestre y el valor de una unidad astronómica. Después, comprueba que el 26 de abril puede ser un día que aproxime a pi.

PONTE A PRUEBA

1 Observa las fracciones e indica cuál no es equivalente al resto: $\frac{10}{6}, -\frac{15}{-9}, -\frac{-15}{-9}, \frac{-5}{-3}, -\frac{-10}{6}$

a) $\frac{10}{6}$ **b)** $-\frac{15}{-9}$ **c)** $-\frac{-15}{-9}$ **d)** $\frac{-5}{-3}$ **e)** $-\frac{-10}{6}$

2 El resultado de $\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{7}{6}-\frac{3}{4}\right):\frac{1}{2}+\left(1-\frac{7}{4}\right)^2$ es:

a) $\frac{25}{16}$ **b)** $\frac{5}{4}$ **c)** $\frac{7}{16}$ **d)** $\frac{13}{16}$ **e)** $\frac{1}{4}$

3 La fracción generatriz correspondiente al número decimal 3,08333... es:

a) $\frac{3}{83}$ **b)** $\frac{3083}{1000}$ **c)** $\frac{37}{12}$ **d)** $\frac{2775}{900}$ **e)** $\frac{2775}{990}$

4 Expresa como intervalo este conjunto numérico:

a) (–1, 3] **b)** [–1, 3] **c)** [1, 3) **d)** (1, 3] **e)** [–1, 3)

5 Indica una cota del error absoluto cometido al aproximar un número por 7,3 con dos cifras significativas y el intervalo que contenga todos los posibles valores exactos.

a) $E_a \leq 0{,}5$; (7,25; 7,34)
b) $E_a \leq 0{,}05$; [7,25; 7,34]
c) $E_a \leq 0{,}5$; [7,25; 7,35)
d) $E_a \leq 0{,}5$; [7,25; 7,34]
e) $E_a \leq 0{,}05$; [7,25; 7,35)